DAVID LECOMTE
Ecole normale suprieure de Cachan
Dpartement de mathmatiques
lecomte@dptmaths.ens-cachan.fr

Formule de Weyl dans un ouvert plan.

Tuteur: DANIEL BENNEQUIN
Enseignant chercheur l'universit Paris 7.

Septembre 1999

Le point de dpart de ce mmoire est un article clbre de Mark Kac, crit en 1966, et intitul **Can one hear the shape of a drum**. L'ide en est la suivante: KAC, l'aide de grosses ruses, tablit la Formule de Weyl, c'est dire qu'il nous donne quelques termes du dveloppement asymptotique en 0 de ce qu'on appelle la trace du noyau de la chaleur, c'est dire un dveloppement en 0 de:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t},$$

o les $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont les "valeurs propres" du Laplacien [1].

Mon travail a consist reproduire la preuve de Kac, en laissant le moins de blancs possible, c'est dire dmontrer tous les rsultats dont il parle comme tant "bien connus". Ainsi, le premier chapitre consiste en l'tude spectrale des oprateurs compacts autoadjoints. Ceci nous servira pour l'tude plus particulire du spectre du Laplacien, qui n'est pas compact, mais dont l'inverse, en un sens que nous dfinirons bien sr, l'est. Tout cel pour aboutir au fait que les vecteurs propres du Laplacien forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, ce rsultat tant le point de dpart de la preuve de Kac. Le chapitre suivant consiste en l'tude de l'quation de la chaleur dans certains cas particuliers, o l'on a une expression des solutions sur laquelle il est possible de travailler. Enfin, le dernier chapitre consiste trouver le premier terme de cette fameuse formule de Weyl, la lumire de tout ce qui prcde, et dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Je vous souhaite une bonne lecture, en esprant que ce qui suit vous intressera. [2]

Je tiens remercier mon tuteur Daniel Bennequin
qui a su d'une part me trouver un sujet intressant
et qui m'a guid tout au long de ma recherche de
la vrit...[3]

[1] Nous en donnerons une dfinition au chapitre 2.

[2] C'est la moindre des choses, vu le temps que j'y ai consacr!!!

[3] Bon, en fait, il m'a guid dans mes recherches bibliographiques. Mais je trouve que "recherche de la vrit", ca fait mieux...

Contents

Chapter 1

Elments de thorie spectrale

Loin de moi l'ide de vous refaire toute la thorie spectrale; cependant nous aurons besoins de quelques ides et rsultats propos des oprateurs compacts autoadjoints [1], fort sympathiques, dans la mesure o ils sont "diagonalisables", comme dans le cas d'un espace hermitien.

1.1 Spectre des oprateurs compacts

On se donne H un espace de Banach [2]. On rappelle que $\mathcal{L}(H)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de H, c'est dire:

$$T \in \mathcal{L}(H) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists C > 0, \text{ tq } \forall x \in H, ||Tx|| \leqslant C||x|| \\ \text{et } T \text{ est linaire} \end{array} \right.$$

$\mathcal{L}(H)$ est muni de la norme d'oprateurs usuelle

$$\forall T \in \mathcal{L}(H), ||T|| = \text{Sup}\{||Tx||, x \in \mathcal{B}_H\} = \text{Sup}\{||Tx||, x \in \mathcal{S}_H\} = \text{Sup}\left\{\frac{||Tx||}{||x||}, x \in H\right\}.$$

Dfinissons encore quelques petites choses:

Dfinition 1.1.1. On dira que $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement si l'image par T de la boule unit ferme de H est relativement compate dans H.

Dsormais, on notera $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des oprateurs compacts sur H.

Dfinition 1.1.2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

- **On appelle ensemble rsolvant de T l'ensemble**

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} |\ (T - \lambda I) \textbf{ est un automorphisme de } H\}.$$

[1] Ou autoadjoints compacts; personne n'est d'accord sur la terminologie, et il en a rsult des rixes entre mathmaticiens. Je n'ai pas d'opinion sur la question.

[2] On aurait pu l'appeler E, ce qui est plus commun pour un Banach, mais bon, plus tard, ce sera un Hilbert, alors autant qu'il ne change pas aussi de nom!

- **On appelle spectre de T, not $\sigma(T)$, le complmentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble rsolvant.**

- **Enfin, on dira que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de T si et seulement si $T-\lambda I$ est non injectif, auquel cas, le noyau de cet endomorphisme de H est appel sous-espace propre relatif λ. On le notera communment H_λ, et on note $\mathbf{VP}(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.**

Un premier thorme permettant de localiser le spectre d'un oprateur:

Thorme 1.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $\sigma(T)$ est compact, et on a*

$$\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||].$$

Dmonstration: $\sigma(T)$ est une partie de $\mathbb{R}$, donc il suffit, pour tablir la compacit, de montrer qu'il s'agit d'un ferm born.

$\sigma(T)$ **est born:** Soit λ un rel qui soit suprieur en module $||T||$. Nous allons tablir que $T - \lambda I$ est bijectif, ce qui nous montrera que $\sigma(T)$ ne peut se trouver dans $\{x \in \mathbb{R}, |x| > ||T||\}$, ou par contrapose, que

$$\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||].$$

Soit $f \in H$. On considre alors l'application

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & H & \to & H \\ & & u & \mapsto & \frac{1}{\lambda}(Tu - f). \end{array}$$

Etant donns u et v dans H, on a:

$$||\Phi u - \Phi v|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}(Tu - Tv)\right|\right| = \frac{1}{|\lambda|}||T(u-v)|| \leqslant \frac{||T||}{|\lambda|}||u - v||,$$

ce qui tablit que Φ est une application contractante, compte tenu de l'hypothse faite sur $|\lambda|$. Il s'en suit qu'elle admet un unique point fixe, disons x, lequel vrifie donc:

$$x = \Phi x = \frac{1}{\lambda}(Tu - f),$$

ou encore, dit autrement:

$$\exists! x \in H, \text{ tq } (T - \lambda I) = f.$$

On a donc que $(T - \lambda I)$ est bijective, ce qui nous arrange plutt d'aprs notre laus[3] prliminaire.

$\sigma(T)$ **est ferm:** Nous allons tout simplement appliquer la dfinition d'un ferm, savoir, nous allons voir que son complmentaire $\rho(T)$ est ouvert.

[3] Nom pompeux pour dsigner l'explication de la dmarche suivie en dbut de preuve.

Soit $\lambda \in \rho(T)$, soit $\epsilon > 0$ et soit $\mu \in]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[$. Enfin, soit $f \in H$. Dfinissons une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & H & \rightarrow & H \\ & & u & \mapsto & (T - \lambda I)^{-1}(f + (\mu - \lambda)u). \end{array}$$

On a alors pour u et v dans H:

$$||\Phi u - \Phi v|| = ||(T - \lambda I)^{-1}(f + (\mu - \lambda)u) - (T - \lambda I)^{-1}(f + (\mu - \lambda)v)|| = ||(T - \lambda I)^{-1}(\mu - \lambda)(u - v)|| \leqslant |\mu -$$

A ce stade, une petite justification: $T - \lambda I$ est continue bijective, donc par le thorme de l'application ouverte, son inverse est galement continu, d'o l'existence de $||(T - \lambda I)^{-1}||$. Ceci dit, il ne reste plus qu' prendre $\epsilon < \frac{1}{||(T - \lambda I)^{-1}||}$ pour avoir Φ contractante. Du coup, Φ admet un unique point fixe x, et comme plus haut, on a:

$$\exists! x \in H, \ tq \ (T - \mu I)x = f.$$

f ayant t choisi quelconque dans H, on a tabli la bijectivit de $T - \mu I$, ou encore le fait que $\mu \in \rho(T)$.

Si on rcapitule, on a ainsi obtenu:

$$\forall \lambda \in \rho(T), \exists \epsilon = \frac{1}{2||(T - \lambda I)^{-1}||} \text{ (par exemple!), tq } \forall \mu \in]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[, \mu \in \rho(T),$$

ce qui quivaut au fait que $\rho(T)$ est ouvert, ou encore que $\sigma(T)$ est ferm.

Fin de la dmonstration. $\diamond$

Nous savons qu'en dimension finie, le spectre d'un endomorphisme est exactement l'ensemble des valeurs propres, car le fait que $T - \lambda I$ soit non injectif est quivalent $T - \lambda I$ non bijectif. En gnral, on n'a pas cette proprit en dimension infinie, quoique... pour les oprateurs compacts, on a quand mme quelque chose qui s'en rapproche:

Thorme 1.1.2. *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$, avec H de dimension infinie. Alors le spectre de T contient 0, et on a:*

$$\sigma(T) - \{0\} = VP(T) - \{0\}.$$

Dmonstration:

- Supposons que 0 ne soit pas dans le spectre de T. Alors T est bijectif, et on a $I = T \circ T^{-1}$ qui se retrouve compact en tant que compose de deux oprateurs compacts. Auquel cas, la boule unit de H se retrouve compacte, ce qui, via un thorme bien connu de topologie, implique que H est de dimension finie. Et ça, c'est plutt contradictoire avec l'hypothse dim$H < \infty$...

- Bon, il est clair que VP$(T) \subset \sigma(T)$, puisque si $T - \lambda I$ n'est pas injectif, il a peu de chances d'tre bijectif. Rciproquement, donnons nous λ dans le spectre de T, et supposons que $T - \lambda I$ soit injectif. Or, un thorme connu sous le nom d'alternative de Fredholm nous assure que $T - \lambda I$ est surjectif, et il serait donc bijectif, ce qui contredirait $\lambda \in \sigma(T)$. Donc λ est forcment dans VP(T), ce qui nous donne bien l'inclusion rciproque souhaite.

Fin de la dmonstration. ◇

Bien sr, le lecteur se dira que je l'ai embrouill avec mon alternative de Fredholm qui semble sortir de nulle part. Qu' cela ne tienne, nous allons en dmontrer la partie qui nous concerne.

Lemme 1.1.1. `Soit` E `un espace vectoriel norm, et soit` F `un sous-espace strict de` E`, et qui soit ferm. Alors`

$$\forall \epsilon > 0, \exists u \in E, \text{ tq } ||u|| = 1 \text{ et } \mathrm{dist}(u, F) \geqslant 1 - \epsilon.$$

Dmonstration: On se donne un rel $\epsilon > 0$. Comme F est un sous-espace strict de E, on peut prendre un vecteur v qui soit dans E mais pas dans F. En outre, comme M est ferm, on a $d = \mathrm{dist}(v, M) > 0$. Comme

$$d = \mathrm{Inf}\{||v - f||, f \in F\},$$

il vient qu'il existe $f_0 \in F$ tel que:

$$d \leqslant ||v - f_0|| \leqslant \frac{1}{1-\epsilon} d.$$

Posant $u = \frac{1}{||v-f_0||}(v - f_0)$, on a $||u|| = 1$ et si $f \in F$, alors:

$$||u - f|| = ||\frac{1}{||v - f_0||}(v - f_0) - f|| = \frac{1}{||v - f_0||}||v - (f_0 + ||v - f_0||f)|| \geqslant 1 - \epsilon,$$

compte tenu de $f_0 + ||v - f_0||f \in F$. Et cette dernire ingalit nous dit bien que la distance de u F est plus grande que $1 - \epsilon$.

Fin de la dmonstration ◇

Ce lemme va nous permettre dtablir le thorme suivant, dont on s'est servi plus haut:

Thorme 1.1.3. *Soit T un oprateur compact sur H, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Si $T - \lambda I$ est injectif alors il est surjectif.

Dmonstration: Supposons que l'image de $T - \lambda I$ ne soit pas H, c'est dire que $T - \lambda I$ n'est pas surjectif. On note:

$$H_1 = \mathrm{Im}(T - \lambda I).$$

On a alors $T(H_1)$ qui est un sous-espace ferm de H_1. Par consquent, T induit un endomorphisme T_1 de H_1, et cet endomorphisme est compact. Il s'en suit que $H_2 = (\lambda I - T)(H_1)$ est un sous espace ferm de H_1. L'injectivit de $T - \lambda I$ nous permet d'affirmer alors que H_2 est strict dans H_1. Le lemme prcdent peut alors tre appliqu, avec $\epsilon = \frac{1}{26{,}92}$:

$$\exists u_1 \in H_1, \text{ tq } ||u_1|| = 1 \text{ et } \mathrm{dist}(u_1, E_2) \geqslant \frac{1}{26, 92}.$$

Et on recommence, en posant $H_3 = (T - \lambda I)^3(H)$, en vrifiant qu'il est bien ferm strict dans H_2, et on en dduit, en appliquant le lemme pour $\epsilon = \frac{1}{26{,}92}$, l'existence d'un u_2 dans H_2 tel que etc... Ainsi, pour tout n entier, on pose

$$H_n = (T - \lambda I)^n(H),$$

et on choisit dans H_n un lment u_n, de norme 1 et tel que

$$\text{dist}(u_n, H_n) \geqslant \frac{1}{26,92}.$$

On a alors, pour n et m deux entiers, tels que $n > m$:

$$Tu_n - Tu_m = Tu_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda u_m + \lambda u_m - Tu_m = (Tu_n - \lambda u_n) - (Tu_m - \lambda u_m) + \lambda(u_n - u_m).$$

Or, les sous-espaces $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une suite dcroissante. Le premier terme de la somme ci dessus est dans H_n donc dans H_{m+1}, le second galement par dfinition de H_{m+1} et $u_n \in H_n \subset H_{m+1}$. Posant:

$$v = (Tu_n - \lambda u_n) - (Tu_m - \lambda u_m) + \lambda u_n,$$

on a donc que $v \in H_{m+1}$, et $Tu_n - Tu_m = v - \lambda u_m = \lambda(\frac{1}{\lambda}v - u_m)$, et on en dduit que

$$||Tu_n - Tu_m|| \geqslant \frac{\lambda}{26,92}.$$

Il s'en suit que l'on ne peut extraire de la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aucune sous-suite convergente, et comme cette dernire est valeurs dans l'image par T de la boule unit de H, on a ni la compacit de T. Donc $\text{Im}(T - \lambda I) = E$ et $T - \lambda I$ est surjectif.

Fin de la dmonstration. ◇

Enfin, une dernire srie de rsultats donnant une ide de la distribution des lments du spectre d'un oprateur compact.

Lemme 1.1.2. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'lements deux deux distincts de $\sigma(T) - \{0\}$. Alors sa limite est 0.

Dmonstration: Etant donn un entier n, λ_n est dans $\sigma(T) - \{0\} = \text{VP}(T) - \{0\}$, donc H_{λ_n} n'est pas rduit $\{0\}$, et on se donne alors e_n vecteur non nul dans le sous-espace propre associ λ_n. On note $E_n = \text{Vect}(e_1, .., e_n)$. On sait que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, compte tenu du rsultat bien connu d'algbre linaire, selon lequel les vecteurs propres relatifs des valeurs propres deux deux distinctes sont indpendants linairement.

D'autre part, tant donn $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in E_n$, on a $(T - \lambda_n I)x = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_n) x_k e_k \in E_{n-1}$, d'o $(T - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1}$. On construit alors l'aide du lemme de Riesz une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs, tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n, ||u_n|| = 1, \text{ et } d(u_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Donnons nous maintenant deux entiers m et n, tels que $m < n$. On a alors

$$\left|\left|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\right|\right| = \left|\left|\frac{(T - \lambda_n I)u_n}{\lambda_n} - \frac{(T - \lambda_m I)u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m\right|\right| = ||u_n - u_m||.$$

Comme $u_m \in E_m \subset E_{n-1}$, on a

$$\left|\left|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\right|\right| ||u_n - u_m|| > \frac{1}{2}$$

.

Ceci tant tabli, supposons que notre suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Notons λ sa limite. La suite u tant valeurs dans la boule unit de H, la suite Tu est valeurs dans un compact donc admet une sous-suite convergente. Or, si on passe la limite dans la relation ci-dessus, on trouve que $0 > \frac{1}{2}$, ce qui ne fait jamais plaisir voir. Il s'en suit que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers 0!

Fin de la dmonstration. ◇

Ce lemme nous servira tablir le thorme alternatif suivant:

Thorme 1.1.4. *Soit T un oprateur compact sur H de dimension infinie. L'une des trois situations suivantes est satisfaite:*

1. *$\sigma(T)$ est rduit $\{0\}$.*
2. *$\sigma(T) - \{0\}$ est fini.*
3. *$\sigma(T) - \{0\}$ est une suite tendant vers 0.*

Dmonstration: Le premier cas est satisfait par l'oprateur nul qui est compact; le second est satisfait par tout oprateur dont le rang est fini, et qui est donc compact. A prsent, supposons que les deux premires proprits ne soient pas satisfaites. Alors $\sigma(T)$ contient une infinit de points, et le lemme prcdent nous a montr que 0 est le seul point d'accumulation du spectre; comme ce dernier est born, on peut former une suite avec ses lments, laquelle doit converger vers 0!

Fin de la dmonstration. ◇

1.2 Etude spectrale des oprateurs autoadjoints compacts

On suppose dsormais que $(H, (.|.))$ est un Hilbert. On rappelle qu'tant donn $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$, appel oprateur adjoint de T, et tel que

$$\forall (x, y) \in H^2, (Tx|y) = (x|T^*y).$$

On dira alors qu'un oprateur est autoadjoint si et seulement si $T = T^*$[4]

L'objet de cette partie est de montrer qu'un oprateur autoadjoint dans un Hilbert sparable est "diagonalisable"[5]

Thorme 1.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint. On pose*

$$m(T) = \mathit{Inf}\{(Tu|u), u \in H, ||u|| = 1\}, \ \mathit{et}\, M(T) = \mathit{Sup}\{(Tu|u), u \in H, ||u|| = 1\}.$$

Alors $\sigma(T)$ est contenu dans le segment $[m(T), M(T)]$ et contient $M(T)$ et $m(T)$.

[4]Ce qui peut tre pris comme une tautologie!

[5]Il ne s'agit pas de la dfinition usuelle de la diagonalisabilit, savoir que l'espace tout entier soit somme directe des sous-espaces propres. Mais elle y ressemble, puisqu'il s'agit du fait que l'espace H est somme hilbertienne. Le premier cas est une diagonalisabilit algbrique -en algbre, les combinaisons linaires infinies n'ont aucun sens-, le second une diagonalisabilit topologique -un vecteur aura une dcompostion infinie suivant une base hilbertienne propre-.

Dmonstration: Le pricipe est le mme que lorsqu'on a montr que le spectre d'un oprateur compact tait inclus dans $[-||T||, ||T||]$: on se donne λ strictement plus grand que $M(T)$. Donnons nous $u \in H$. Alors

$$\left(T\left(\frac{u}{||u||}\right)|\frac{u}{||u||}\right) \leqslant M(T), \text{ ou encore:}$$

$$(Tu|u) \leqslant M(T).||u||^2.$$

Du coup, on a

$$((\lambda I - T)u|u) \leqslant (\lambda - M)||u||^2.$$

On voit donc que la forme bilinaire $b \ : \ (u, v) \mapsto ((\lambda I - T)u|v)$ est continue coercive. Le thorme de Lax-Milgram nous assure alors que, tant donn $f \in H$, il existe un unique $u \in H$, tel que

$$\forall v \in H, b(u, v) = ((\lambda I - T)u|v) = (f|v).$$

La caractrisation par dualit des lments de H nous dit alors que $(T - \lambda I)(-u) = f$. Donc $T - \lambda I$ est inversible, et $\lambda \in \rho(T)$.

On a bien par la suite que les lments du spectre sont infrieurs $M(T)$.

A prsent, montrons que $M(T)$ est dans le spectre; considrons pour cela la forme bilinaire symtrique positive

$$a : (u, v) \mapsto ((M(T)I - T)u|v).$$

On peut alors appliquer Cauchy-Schwarz:

$$\forall (u, v) \in H, |(M(T)u - Tu|v)|^2 \leqslant (M(T)u - Tu|u).(M(T)v - Tv|v),$$

et il s'en suit que

$$||Tu - M(T)u|| \leqslant C(M(T)u - Tu|u)^{1/2}.$$

Compte tenu de la dfinition de $M(T)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, valeurs dans la sphre unit de H, et telle que

$$\lim_{n\to\infty} (Tu_n|u_n) = M(T).$$

En passant la limite dans notre ingalit de Cauchy-Schwarz, le membre de droite tend vers 0, donc

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = M(T)u_n.$$

A prsent, on y est presque: si $M(T)$ n'est pas dans le spectre, c'est que $T - M(T)I$ est bijective, donc on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (T - M(T)I)^{-1}(T - M(T)I)u_n = (T - M(T)I)^{-1}(Tu_n - M(T)u_n),$$

et on aurait alors que la suite u converge vers 0, tout en tant valeurs dans la sphre unit. Damned! Donc $M(T)$ est dans le spectre.

Bon, on ne va pas tout recommencer pour $m(T)$, la dmarche est la mme. Sinon, on peut aussi remarquer que $m(T) = -M(-T)$, ce qui nous permet de conclure directement en appliquant ce qui prcde $-T$, ainsi que l'galit au signe prs du spectre de T et celui de $-T$.

Fin de la dmonstration. $\diamond$

Ce thorme a un corollaire immdiat:

Thorme 1.2.2. *Soit T un oprateur autoadjoint sur H, dont le spectre est rduit 0. Alors $T = 0$.*

Dmonstration: On sait que $m(T)$ et $M(T)$ sont dans le spectre, qui est lui mme rduit au singleton nul. Du coup, $m(T) = M(T) = 0$, ce qui peut tre traduit en:

$$\forall u \in H, (Tu|u) = 0.$$

Alors, tant donn $u \in H$, on a:

$$\forall v \in H, (T(u+v)|u+v) = 0 = (Tu|u) + 2(Tu|v) + (Tv|v) = 2(Tu|v),$$

et il s'en suit que Tu est nul, puisqu'orthogonal tout vecteur v de H.

Fin de la dmonstration. $\diamond$

Voici enfin le rsultat essentiel de ce chapitre:

Thorme 1.2.3. *On suppose que H est sparable. Soit T un oprateur autoadjoint compact sur H. Alors H admet une base hilbertienne forme de vecteurs propres de T.*

Dmonstration: On note $\lambda_0 = 0$, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des valeurs propres distintes deux deux de T.

Donnons nous $u \in H_{\lambda_n}$ et $v \in H_{\lambda_m}$ non nuls, pour $m \neq n$. On a alors:

$$(Tu|v) = \lambda_n(u|v) = \lambda_m(u|v) = (u|Tv).$$

Comme $m \neq n$, on a $\lambda_m \neq \lambda_n$, ce qui nous assure que $(u|v) = 0$: les espaces propres relatifs des valeurs propres distinctes sont donc orthogonaux.

Considrons l'espace $H_0 = \mathrm{Vect}\{H_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Cet espace est engendr par les sous-espaces propres de T, donc est stable par T. Or, on sait qu'un sous-espace est stable par un oprateur si et seulement si l'orthogonal est stable par l'adjoint de cet oprateur; auquel cas, H_0° est stable par $T^* = T$. Notons $T_\circ$ l'endomorphisme de H_0° induit par T. Alors si λ est valeur propre de $T_\circ$, elle est aussi valeur propre de T, ce qui est exclu par construction. Il s'en suit que le spectre de $T_\circ$ est rduit $\{0\}$, et d'aprs le thorme prcdent, on a affaire l'endomorphisme nul. Ainsi, H_0° est dans le noyau de T, qui lui mme se trouve dans H_0; si on tient compte du fait que H_0° est orthogonal H_0, on se retrouve avec $H_0^\circ = \{0\}$, ce qui nous arrange pas mal, vu que ca nous donne la densit de H_0.

Il ne reste plus qu' exhiber la base hilbertienne de H annonce dans l'nonc du thorme: on l'obtient tout simplement en runissant des bases hilbertiennes de chacun des sous-espaces H_{λ_n}.

Fin de la dmonstration. $\diamond$

Chapter 2

Spectre du Laplacien

Ce chaptre se propose d'tablir un rsultat bien connu propos de l'oprateur Laplacien, savoir qu'il fournit une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres. Il paratra alors vident de se placer par la suite dans cette base pour tudier les solutions de l'quation de la chaleur qui fait l'objet du prochain chaptre.

2.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Il s'agit de rappeler ce que sont les espaces de Sobolev $(H^k(\Omega))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(H_0^k(\Omega))_{k\in\mathbb{N}}$, de manire se fixer les ides en vue du paragraphe suivant.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Dfinition 2.1.1. On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $L^2(\Omega)$, dont toutes les drives partielles au sens des distributions sont galement dans $L^2(\Omega)$. Autrement dit:

$$f \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,..,n\}, \exists f_i \in L^2(\Omega),\ \textbf{tq}\ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \int_\Omega f\partial_i\phi = -\int_\Omega f_i\phi.$$

Etant donn $f \in H^1(\Omega)$, on notera, pour tout i compris entre 1 et n

$$f_i = \partial_i f.$$

Cet espace dispose d'un produit scalaire hrit de celui de $L^2(\Omega)$ [1]. Mais ce dernier n'est pas suffisant pour en faire un espace complet: il faut pour cela il faut tenir compte dans notre produit scalaire des drives partielles d'lments de $H^1(\Omega)$. Qu' cela ne tienne, on a le:

Thorme 2.1.1. *$H^1(\Omega)$ muni de l'application:*

$$\begin{array}{cccc} < \mid > & : & H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f,g) & \mapsto & < f|g >= \int_\Omega fg + \sum\limits_{k=1}^{n}\int_\Omega \partial_k f\partial_k g \end{array}$$

est un espace de Hilbert.

[1]Que l'on notera (|).

Dmonstration: Le fait que $< \ | \ >$ soit un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ ne fait aucun doute. Seule la compltude mrite qu'on s'y intresse. Donnons nous une suite de Cauchy $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $H^1(\Omega)$. Alors, en crivant la condition de Cauchy:

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant k, \forall p \in \mathbb{N}, ||f_{k+p} - f_k||_{H^1(\Omega)} \leqslant \epsilon.$$

Or, pour $f \in H^1(\Omega)$, on a

$$||f||^2_{H^1(\Omega)} = ||f||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} ||\partial_k f||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Il s'en suit que:

$$||f||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||f||_{H^1(\Omega)} \text{ et } \forall k \in \{1,..,n\}, ||\partial_k f||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||f||_{H^2(\Omega)},$$

et on en dduit que chacune des suites $(\partial_k f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Ce dernier tant complet, on en dduit que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans vers un lment $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, et que pour tout entier k compris entre 1 et n, $(\partial_k f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un lment $g_k \in L^2(\Omega)$. Reste tablir que f est dans $H^1(\Omega)$, autrement dit que les fonctions $(g_k)_{k\in\{1,..,n\}}$ sont les drives partielles respectives de f.

Donnons nous donc $k \in \{1,..,n\}$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega), (\partial_k f_i|\phi) = -(f_i|\partial_k\phi).$$

En passant la limite lorsque i tends vers l'infini, et en utilisant le fait que la convergence forte dans $L^2(\Omega)$ entrane la convergence faible, on trouve que g_k est la drive distributionnelle de f. Comme cette fonction est dans $L^2(\Omega)$, on a gagn.

Fin de la dmonstration. ◇

Dfinissons prsent par rcurrence les espaces de Sobolev d'ordre suprieur un:

Dfinition 2.1.2. Soit k un entier strictement suprieur 1. On dira que f appartient $H^k(\Omega)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f \in H^{k-1}(\Omega) \\ \textbf{et } \forall i \in \{1,..,n\}, \partial_i f \in H^{k-1}(\Omega) \end{cases}$$

Puis viennent les espaces $H^k_0(\Omega)$:

Dfinition 2.1.3. On note $H^k_0(\Omega)$ la fermeture dans $H^k(\Omega)$ de l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$.

Et enfin, les Sobolev d'ordre entier ngatif:

Dfinition 2.1.4. On note $H^{-k}(\Omega)$ le dual de $H^k_0(\Omega)$.

Enfin, un thorme important que nous admettrons car il est loin d'tre sous-trivial:

Thorme 2.1.2. *L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Voil, c'est peu prs tout ce dont nous aurons besoin pour la suite. Nous pouvons passer l'tude des problmes de Dirichlet, dans les espaces de Sobolev qui en constituent le bon cadre...

2.2 Formulation faible du problme de Dirichlet

Commenons par donner une ide de ce qu'on appelle problme de Dirichlet.

Dfinition 2.2.1. Soit Ω un ouvert born de $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction borne sur Ω. Une fonction

$$u \in \mathcal{C}_b^2(\Omega)$$

est dite solution classique du problme de Dirichlet si et seulement si l'on a

$$\Delta u = f \textbf{ sur } \Omega \textbf{ et } u = 0 \textbf{ sur le bord de } \Omega.$$

Une des ides majeures de l'analyse moderne est la suivante: pour avoir l'existence d'une solution pour un certain problme, tel le prcdent, il est plus facile de la chercher dans un espace plus grand. C'est dire, imposer moins de contraintes dans notre problme. Bien sr, on aimerait que notre solution possde les proprits de rgularit demandes dans le problme classique. C'est pourquoi la rsolution d'un tel problme se fait en deux temps: tout d'abord, tablir de faon pas trop fatigante l'existence d'une solution un problme plus faible, puis tude de la rgularit des solutions obtenues.

Ainsi, la premire tape pour librer un peu notre solution de ses contraintes consiste exprimer le problme en termes d'espaces de Sobolev:

Dfinition 2.2.2. Soit Ω un ouvert born de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in L^2(\Omega)$. Une fonction

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

sera dite solution forte du problme de Dirichlet si et seulement si l'on a $\Delta u = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On voit assez facilement que le problme fort est plus gnral que le problme classique, et que, par consquent, les solutions classiques sont chercher parmi les solutions fortes. A noter que la condition de nullit au bord de Ω, qui semble avoir disparu dans le problme fort, est en fait incluse dans la condition d'appartenance $H_0(\Omega)$ (voir ce qui a t vu dans la partie sur les espaces de Sobolev).

Enfin, une dernire tape dans l'affaiblissement de notre problme consiste l'exprimer en termes variationnels. A ce stade, il faut juste se dire que c'est une mthode qui marche; nous verrons plus tard en quel sens le problme devient "facile" rsoudre, l'aide du fameux thorme de Lax-Milgram.

L'expression variationnelle du problme se fait toujours de la mme manire: on commence par se donner $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $u \in H^2(\Omega)$. On voit alors que:

$$\int_\Omega \phi \Delta u = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \phi \partial_k^2 u.$$

Aprs une intgration par parties de chacun des termes de la somme (on intgre le $\partial_k^2 u$ et on drive ϕ), on obtient un terme du style $\int_\Omega \partial_k \phi \partial_k u$ et un autre terme nul, cause de la condition de nullit de ϕ sur le bord de Ω. Il s'en suit que

$$\int_\Omega \phi \Delta u = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \phi \partial_k u.$$

Ce calcul prliminaire tant fait, on est amen dfinir:

$$B[v,u] = \sum_{k=1}^{n} \partial_k v \partial_k u,$$

cette chose l ayant un sens ds que u et v sont dans $H^1(\Omega)$. B devient alors une forme bilinaire sur $H^1(\Omega)$. Ceci dit, donnons une nouvelle dfinition pour un nouveau type de solutions au problme de Dirichlet:

Dfinition 2.2.3. Soit Ω un ouvert born de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Une fonction

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

est dite solution faible du problme de Dirichlet si et seulement si

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), B[v,u] = (f,v).$$

A nouveau, on voit que toute solution forte est solution faible du problme de Dirichlet, et qu'on a aussi pas mal affaibli notre problme de dpart: on n'impose qu'une trs faible rgularit, et la solution n'est assujettie qu' des conditions globales. Ainsi, il est assez naturel d'esprer pouvoir rsoudre facilement ce problme.

Thorme 2.2.1. *Pour tout $\lambda \geqslant 1$ et pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problme de Dirichlet pour l'oprateur*

$$L = -\Delta + \lambda I$$

admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$. En outre, cette solution vrifie

$$||u||_{1,2} \leqslant C||u||_{-1,2}.$$

Dmonstration: Commenons par une ingalit portant sur la forme bilinaire B. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors:

$$B[u,u] = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} (\partial_k u)^2 = ||\nabla u||_2^2 = ||\nabla u||_2^2 + ||u||_2^2 - ||u||_2^2 \geqslant ||u||_{1,2}^2 - ||u||_2^2.$$

Cette ingalit est appele ingalit de Garding [2]. A prsent, il est temps d'en finir.

Soit $\lambda \geqslant 1$ un rel. Considrons la forme bilinaire associe notre oprateur $L = -\Delta + \lambda I$. [3]Posons donc:

$$\forall (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2, b[v,u] = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \partial_k u \partial_k v + \lambda \int_{\Omega} uv.$$

Vrifions que les hypothses du thorme de Lax-Milgram sont valides par b.

[2]Un peu de culture ne fait jamais de mal!!

[3]A noter que cet oprateur est bien dfini, puisque $H_0^1(\Omega)$ est inclus dans son dual, comme tout espace de Hilbert. L'identit est donc bien une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

- Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors:

$$b[u,u] = B[u,u] + \lambda||u||_2 \geqslant ||u||_{1,2}^2 - ||u||_2^2 + \lambda||u||_2^2 \geqslant ||u||_{1,2}^2,$$

d'aprs notre ingalit de Garding, et il s'en suit la coercivit de notre forme b.

- Soient u et v deux lments de $H_0^1(\Omega)$. On a alors:

$$|b[u,v]| \leqslant |B[u,v]| + \lambda(u|v)_{L^2},$$

et l, une simple application de Cauchy-Schwartz nous amne:

$$|b[v,u]| \leqslant C||u||_{1,2}||v||_{1,2}.$$

b est donc continue et coercive. Le thorme de Lax-Milgram nous assure alors que

$$\forall f \in H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \exists u \in H_0^1(\Omega), \text{ tq } \forall v \in H_0^1(\Omega), b[v,u] = (f,v),$$

ce qui peut etre traduit en l'existence d'une solution faible pour le problme de Dirichlet faible associ l'oprateur L, et nous avons galement l'ingalit propose dans le thorme.

Fin de la dmonstration ◇

2.3 Consquences du point de vue spectral

Ah! nous allons enfin tablir les proprits bien connues du spectre du Laplacien [4]. On rappelle les notations, utilises plus haut et qui nous serviront:

- $\forall (u,v) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2, B[v,u] = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \partial_k u \partial_k v,$
- λ est un rel strictement plus grand que 1,
- $L = -\Delta + \lambda I,$
- $\forall (u,v) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2, b[v,u] = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \partial_k u \partial_k v + \lambda \int_\Omega uv.$

On a vu dans la partie prcdente que pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), b[v,u] = (f,v).$$

On dfinit alors une application que l'on note $\overline{G}$, de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, qui un lment f [5] associe la solution faible u dont on vient de parler. La dernire ingalit du thorme d'exsitence et d'unicit de la solution faible nous dit que l'oprateur $\overline{G}$ est continu. On dfinit ensuite $\overline{I}$ comme tant l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et on pose enfin $G = \overline{IG}$. A partir de l, tout s'enchaine:

[4]Pour vous, ca va couler de source, mais c'est un problme qui m'a occup pendant plus de deux semaines!!

[5]Qui peut tre vu comme lment de $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 2.3.1. `L'oprateur` $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ `est compact.`

Dmonstration: On sait que l'application $\overline{I}$ est compacte, et compte tenu du fait que $\overline{G}$ et continue, et que la compose d'un oprateur continu par un oprateur compact reste compacte, on a bien que G est compact.

Fin de la dmonstration ◇

Puis vient un premier thorme utilisant ce que nous avons vu sur les oprateurs compacts [6]:

Thorme 2.3.1. *Quel que soit* $\mu \in (C)$*, l'un des trois* [7] *cas suivants se produit:*

- *Pour tout* $f \in L^2(\Omega)$*, il existe une unique solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *au problme de Dirichlet*
$$-\Delta u + \mu u = f, \ \textit{ou}$$
- *il existe au plus une famille libre finie* $(u_1, .., u_N)$ *d'lments de* $H_0^1(\Omega)$*, telle que*
$$\forall i \in \{1, .., n\}, \forall v \in H_0^1(\Omega), B[v, u] + \mu(v|u)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

En outre, l'ensemble des scalaires μ *vrifiant la seconde proprit est au plus dnombrable.*

Dmonstration: J'aurais presque envie de dire qu'il suffit d'appliquer ce qu'on sait sur les oprateurs compacts. Mais bon, c'est l'ENS qui offre le papier, alors pas de scrupules. Supposons que μ soit valeur propre de l'oprateur $-\Delta$, et donnons nous u un vecteur propre associ. [8] On a donc:

$$-\Delta u = \mu u \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Or, en ajoutant λu des deux cts, on se retrouve avec

$$(-\Delta + \lambda I)u = (\mu + \lambda)u.$$

En appliquant notre oprateur G tout neuf qu'on a, on a:

$$G(-\Delta + \lambda I)u = (\mu + \lambda)Gu.$$

Or, qu'est-ce que G? G est l'application qui une inconnue associe sa solution faible, peu de choses prs. Du coup, on a tout simplement $G(-\Delta + \lambda I)u = u$. Et du coup:

$$(\lambda + \mu)Gu = u.$$

Bien sr, les quelques lignes qui prcdent pouvaient en fait faire l'objet d'un raisonnement par quivalences, ce qui nous donne une relation entre les valeurs propres de G et celles de $-\Delta$. En effet, μ est valeur propre de $-\Delta$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda+\mu}$

[6] Il faut bien qu'elle serve, cette premire partie!!!

[7] En fait, il n'y en a que deux!

[8] A ce stade, une petite prcision: Δ envoie $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ qui est son dual. Par consquent, on peut le voir via le thorme de Riesz comme un "endomorphisme" de $H_0^1(\Omega)$, ce qui justifie l'utilisation de termes tels que valeurs propres et vecteurs propres. Notamment, dire que $-\Delta u = \mu u$ signifie que $Deltau$ et μu reprsentent la mme forme linaire sur $H_0^1(\Omega)$.

est valeur propre de G. Or, que sait on sur G? Qu'il est compact. Et que sait on sur les oprateurs compacts? Il suffit de regarder plus haut: ils vrifient exactement ce que l'on veut. Une fois qu'on a mis en relation notre thorme avec un problme aux valeurs propres, on se rend compte que tout est dmontr.

Fin de la dmonstration. ◇

Mais le Laplacien possde une proprit supplmentaire, que l'on n'a pas encore exploite: il est autoadjoint! Comment cela se transmet-il G? On a le

Lemme 2.3.2. G est autoadjoint.

Dmonstration: Soient f et g dans $L^2(\Omega)$. On a

$$(Gf|g) = b[\overline{G}f, \overline{G}g] \text{ (proprit de la solution faible)},$$

$$(Gf|g) = b[\overline{G}g, \overline{G}f] \text{ puisque le laplacien est autoadjoint},$$

$$(Gf|g) = (Gg|f) = (f|Gg).$$

Et il s'en suit que G est bien autoadjoint.

Fin de la dmonstration. ◇

Et l, ca nous arrange plutt bien: parce que les oprateurs autoadjoints compacts, ils ont des proprits intressantes de diagonalisabilit. En effet, le dernier thorme de la partie de thorie spectrale nous amne tout naturellement le thorme suivant:

Thorme 2.3.2. *Il existe une famille $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de rels positifs, croissante et sans point d'accumulation, ainsi qu'une base orthonorme $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, tels que*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, -\Delta\phi_i = \lambda_i \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Dmonstration: La seule chose qui ne soit pas claire la lumire de tout ce qui prcde est la positivit des "valeurs propres" du Laplacien. Or, si f est dans $H_0^1(\Omega)$, on a vu que:

$$(-\Delta f|f) = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega (\partial_k f)^2 \geqslant 0,$$

ce qui nous assure de la positivit de l'oprateur $-\Delta$ et donc de la positivit de ses "valeurs propres".

Fin de la dmonstration. ◇

2.4 Dernires remarques

Un dernier mot [9], en fait, pour clore cette partie.

Tout d'abord, que peut on dire de la rgularit de ce que nous avons appel les vecteurs propres de l'oprateur $-\Delta$? Eh bien, il se trouve que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Ce problme de rgularit est assez compliqu traiter, et pour cause: on a relach considrablement les contraintes sur ce qu'on appelle solution d'un problme de Dirichlet , en prenant le parti de considrer le problme

[9] Deux choses plus prcisment.

au sens faible. Le gain en a t une manire simple d'tablir l'existence et l'unicit de solutions faibles, l'aide du thorme de Lax-Milgram. Mais la contrepartie est l: pour remonter la solution classique, il y a encore du travail... Il se trouve que le rsultat de rgularit fondamental est le suivant: les fonctions propres de $-\Delta$ sont dans $H^2(\Omega)$ [10]. En admettant ce rsultat, il vient, compte tenu de

$$-\Delta\phi_n = \lambda_n \phi_n$$

que $\Delta\phi_n$ est dans $H^2(\Omega)$, donc que ϕ_n se trouve dans $H^4(\Omega)$. Et ainsi de suite... Du coup, la fonction propre ϕ_n se retrouve dans $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} H^{2k}$, et donc que ϕ_n est $\mathcal{C}^\infty$.

Deuxime point important: ce qu'on vient d'tablir pour l'oprateur $-\Delta$ n'a requis que deux des proprits de cet oprateur: la plus simple est le fait qu'il s'agisse d'un oprateur symtrique. La suivante est ce qu'on appelle l'uniforme ellipticit. C'est une proprit, assez monstrueuse crire avec plein de multiindices partout, qu'ont certains oprateurs diffrentiels. Tout ce qui prcde peut tre adapt tout oprateur uniformment elliptique. Bien entendu, le cas du Laplacien tait fort simple traiter, puisque c'est le plus simple des oprateurs uniformment elliptiques. Le passage compliqu est l'tablissement de l'ingalit de Garding. Moins simple pour un oprateur elliptique d'ordre 2, carrment compliqu pour un oprateur elliptique d'ordre quelconque, avec des partitions de l'unit, de la transformation de Fourier, enfin, des grosses ruses quoi. Bien sr, nous aurions pu traiter, tant qu' faire ces cas l, plus gnraux. Mais, l'ducation nationale n'est pas trs riche, et vue la conjoncture actuelle, il vaut mieux ne pas abuser du papier gracieusement offert par l'cole. [11]

[10]Voir Brzis par exemple.

[11]Bon, en fait, j'avoue, j'avais la flemme!

Chapter 3

L'quation de la chaleur

Dans cette partie, nous allons voir quelques cas particuliers de l'quation de la chaleur, dont nous aurons besoin pour la suite. Notamment, une rsolution l'aide des proprits spectrales du Laplacien, et la rsolution pour divers types d'ouverts sur lesquels on la considre, cas dans lesquels on a une expression particulire d'une solution: $\mathbb{R}^n$ et un carr.

L'quation de la chaleur est une quation qui rgit l'volution des systmes diffusifs, ou phnolnes de transferts. Ainsi, on se donne une portion d'espace Ω, on suppose son bord maintenu temprature constante nulle. Aprs la modlisation du phnomne, on montre que l'quation rgissant l'volution de la temprature $u(\mathbf{r}, t)$est:

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u & \text{sur} \quad \Omega\times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial_\Omega\times]0, +\infty[\end{cases}$$

3.1 Rsolution gnrale

On se place dans le cas d'un ouvert born de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle Ω[1], et on suppose avoir exhib une solution de notre problme qui soit dans $L^2(\Omega\times]0, +\infty[)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u = \partial_t u & \text{sur } \Omega \text{ et pour } t > 0, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On convient de noter $P_\Omega(\rho|\mathbf{r}, t)$ la valeur au point $\mathbf{r}$ et au temps t prise par la solution de ce problme correspondant une distribution de chaleur initialement concentre au point $\rho \in \Omega$; en d'autres termes, $P_\Omega(\rho|\mathbf{r}, t)$ vrifie le systme ci-dessus, avec en outre la condition

$$\lim_{t\to 0} P_\Omega(\rho|\mathbf{r}, t) = \delta_\rho.$$

Commençons par donner une expression de cette solution: $t > 0$ fix, $\mathbf{r} \mapsto P_\Omega(\rho|\mathbf{r}, t)$ est dans $L^2(\Omega)$, donc peut tre dcompos suivant la base hilbertienne des fonctions propres du Laplacien pour le problme de Dirichlet:

$$\exists (a_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2, \text{ tq } P_\Omega(\rho|\mathbf{r}, t) = \sum_1^\infty a_n(t)\phi_n(\mathbf{r}),$$

[1]Tous les ouverts s'appellent Ω!

la limite tant prendre dans $L^2(\Omega)$. Pour expliciter les coefficients de notre suite $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, on va se servir de l'quation vrifie par $P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\Delta P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) & = & -\frac{1}{2}\sum_1^\infty a_n(t)\lambda_n\phi_n(\mathbf{r}) \\ \partial_t P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) & = & \sum_1^\infty a_n'(t)\phi_n(\mathbf{r}) \end{array}\right.$$

Do par unicit du dveloppement suivant une base hilbertienne, il vient:

$$\forall t>0, a_n'(t) = -\frac{1}{2}\lambda_n a_n(t),$$

donc $\forall t>0, a_n(t) = K_n e^{-\lambda_n t}$, et

$$P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) = \sum_1^\infty K_n e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}\phi_n(\mathbf{r}).$$

Restent dterminer les termes de la suite K; le lecteur attentif [2] notera qu'on ne s'est pas encore servi de la condition $P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) \rightarrow_{t\to 0} \delta_\rho$. Or, $t>0$ fix, la fonction $P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t)$ est dans $L^2(\Omega)$, donc dfinit une distribution d'ordre 0, comme toute fonction L^1_{loc} qui se respecte. Il s'en suit qu'elle peut tre tendue en une forme linaire continue sur $\mathcal{C}^0(\Omega)$, et on peut tudier la convergence lorsque $t\to 0$ vers δ_ρ en testant sur des fonctions continues. Fait extraordinaire, si on se donne un entier $n>0$, la fonction ϕ_n est continue sur Ω; on s'empresse donc de tester $P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t)$ dessus, et compte tenu du fait que la dualit va coincider ici avec le produit scalaire L^2, on aura:

$$(P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t),\phi_n) = (P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t)|\phi_n) = K_n e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t} \rightarrow_{t\to 0} K_n.$$

Cette limite est cense tre $(\delta_\rho,\phi_n) = \phi_n(\rho)$, et on en dduit la valeur de K_n:

$$\forall n\in\mathbb{N}, K_n = \phi_n(\rho)!$$

Ceci fait, on a enfin une expression de $P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t)$ sur laquelle il est possible de travailler:

$$P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) = \sum_1^\infty e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}\phi_n(\rho)\phi_n(\mathbf{r}).$$

Bien entendu, on vrifie sans problme que rciproquement, cette expression convient. Ce qui nous dmontre au passage que notre quation de la chaleur, telle qu'on l'a pose, admet une unique solution.

Donnons aussi l'expression analogue avec les lments propres de $-\frac{1}{2}\Delta$:

$$P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) = \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t}\phi_n(\rho)\phi_n(\mathbf{r}).$$

[2] Trs bonne qualit pour un lecteur!

3.2 Quelques cas particuliers

3.2.1 Cas o $\Omega = \mathbb{R}^n$

Ce cas l est assez classique, puisqu'on l' tudi dans tous les sens en cours de physique en prpa. Il est presque de culture gnrale de savoir que la solution est " peu de choses prs" une gaussienne. Plus prcisment, la solution du problme dans $\mathbb{R}^n$ est:

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (\mathbf{r}, t) & \mapsto & \frac{1}{2\pi t)^{n/2}} e^{-||\mathbf{r}-\rho||^2/2t} \end{array},$$

pour une distribution de chaleur concentre initialement au point ρ.

3.2.2 Cas o Ω est un carr

On suppose maintenant que Ω est un carr de ct a, et on considre l'quation d'volution correspondant une distribution de chaleur initialement concentre au centre de ce carr. On fait un changement d'origine, et notre problme revient trouver la fonction v dans $H^2(\Omega)$ telles que:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u & \text{sur} & \Omega\times]0,+\infty[\\ u = 0 & \text{sur} & \partial_\Omega\times]0,+\infty[\\ \lim\limits_{t\to 0^+} = \delta & & \end{array} \right.$$

Nous allons appliquer la mthode de rsolution gnrale vue plus haut, qui nous donnera un dveloppement en srie de la fonction v, suivant la base propre de $L^2(\Omega)$ associe Δ. L'intrt tant que dans ce cas, on sait exprimer valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien.

Nous allons ainsi exhiber ces lments propres, par une mthode assez usuelle, consistant sparer les variables. C'est dire que la gomtrie du problme nous incite chercher un vecteur propre sous la forme:

$$\forall \mathbf{r} = (x, y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^2, \phi(\mathbf{r}) = f(x)g(y),$$

et on s'autorise toutes les manipulations qu'on veut. C'est dire qu'on fait un raisonnement heuristique, qui nous donnera alors des candidats tre lments propres du Laplacien. Les fonctions f et g doivent en outre s'annuler toutes deux en $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.

On a alors:

$$\forall \mathbf{r} = (x, y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^2, \Delta\phi(x, y) = f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = \lambda f(x)g(y),$$

et c'est l qu'on fait du calcul formel en divisant par le second membre:

$$\forall \mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda.$$

Et il se trouve que le membre de gauche ne peut tre constant que si chacun de ses termes l'est. Ainsi, il existe deux constantes k_1, k_2, telles que l'on ait:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], & f''(x) = k_1 f(x) \\ \forall y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], & g''(y) = k_2 g(y) \\ k_1 + k_2 = \lambda & \end{array} \right.$$

Alors l, rflchissons un peu. f ou g est soit une fonction hyperbolique, soit une fonction circulaire, selon le signe de la constante k_1 ou k_2. Or, elles doivent toutes deux s'annuler aux extrmits de $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Donc ce sont des fonctions circulaires, et k_1 et k_2 sont toutes deux ngatives. On pose:

$$k_1 = -K_1^2 \text{ et } k_2 = -K_2^2.$$

On a alors:

$$\forall x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], f(x) = A\cos(K_1 x + B) \text{ et}$$
$$\forall y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], g(y) = C\cos(K_2 y + D).$$

Les conditions au bord impliquent que:

$$-K_1\frac{a}{2} + B = 0 \left[\text{mod } \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } K_1\frac{a}{2} + B = 0 \;[\text{mod } \pi].$$

Il s'en suit que $B = 0$ [mod π] et que $K_1 = 0$ $\left[\text{mod } \frac{\pi}{a}\right]$, donc qu'il existe un entier p_1 et un entier q_1 tels que $K_1 = (p_1 - q_1)\frac{\pi}{a}$ et $B = (p_1 + q_1)\frac{\pi}{2}$.

De mme, il existe un entier p_2 et un entier q_2 tels que $K_2 = (p_2 - q_2)\frac{\pi}{a}$ et $C = (p_2 + q_2)\frac{\pi}{2}$, ce qui nous amne la forme de f et g:

$$\forall x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], f(x) = \cos\left((p_1 - q_1)\frac{\pi}{a}x + (p_1 + q_1)\frac{\pi}{2}\right) \text{ et}$$
$$\forall y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], g(y) = \cos\left((p_2 - q_2)\frac{\pi}{a}y + (p_2 + q_2)\frac{\pi}{2}\right).$$

Enfin, on a

$$\lambda = k_1 + k_2 = -\frac{\pi^2}{a^2}((p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2).$$

Voil pour l'heuristique. On vrifie rciproquement que pour tout quadruplet d'entiers (p_1, p_2, q_1, q_2), la fonction

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^2, \phi(x,y) = \cos\left((p_1 - q_1)\frac{\pi}{a}x + (p_1 + q_1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((p_2 - q_2)\frac{\pi}{a}y + (p_2 + q_2)\frac{\pi}{2}\right)$$

est vecteur propre du Laplacien, relatif la valeur propre $-\frac{\pi^2}{a^2}((p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2)$.

A ce stade, qu'a-t-on? On a russi exhiber une partie des lments propres du Laplacien sur le carr. On espre, avec un peu de chance, que cela va suffir. Et on recommence donc le travail fait dans le paragraphe **Rsolution gnrale**. Travail que je ne vais pas dtailler, mais qui aboutit une solution notre problme, qui est:

$$\forall (x,y) \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]^2, \forall t > 0, v(x,y,t) = \frac{4}{a^2} \sum_{n,m \text{ entiers impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)}{2a^2}\pi^2} \cos\left(m\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right).$$

Chapter 4

La formule de Weyl

Nous en arrivons enfin la formule qui nous intresse. En mettant bout bout tout ce qui prcde, nous allons parvenir une estimation asymptotique de $\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t}$ lorsque $t \to 0$, qu'on appelle formule de Weyl. Cette formule a d'ailleurs un lourd pass derrire elle: en effet, Lorentz l'nonça sans dmonstration lors d'un congrs auquel assistaient Hilbert et son lve Weyl. Hilbert, impressionn, dit qu'il n'estimait pas qu'on puisse la dmontrer de son vivant, et quelle ne fut pas sa surprise lorsque son lve y parvint seulement deux annes plus tard! Du coup, Hilbert devint dpressif l'ide de s'tre fait avoir ainsi, il se mit trainer dans les bars, et connut la fin que l'on sait[1]...

4.1 On y va!

On convient de noter $P_0(\rho|\mathbf{r},t)$ la solution du problme de la chaleur dans $\mathbb{R}^2$; cette fonction est connue explicitement:

$$P_0(\rho|\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi t} e^{-||\mathbf{r}-\rho||^2/2t}.$$

On se donne $a > 0$, et on note Q le carr centr en ρ de ct a; on suppose avoir choisi a suffisamment petit pour que

$$Q \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Et l, on est oblig d'admettre un rsultat. Intuitivement, il est assez trivial, mais pour le dmontrer... Il s'agit du fait suivant. Prenons deux ouverts plans, Ω_1 et Ω_2, avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. On souhaite comparer $P_{\Omega_1}(\rho|\mathbf{r},t)$ et $P_{\Omega_2}(\rho|\mathbf{r},t)$. Il est assez naturel d'esprer que

$$P_{\Omega_1}(\rho|\mathbf{r},t) \leqslant P_{\Omega_2}(\rho|\mathbf{r},t).$$

En effet, ralisons sparment l'exprience de diffusion thermique dans Ω_1 et dans Ω_2. Vu qu'il y a absorption de chaleur sur $\partial\Omega_1$, la temprature un instant donn en un point de Ω_1 sera feelinguement plus faible dans le premier cas que dans le second. D'o l'ingalit:

$$\forall \mathbf{r} \in Q, P_Q(\rho|\mathbf{r},t) \leqslant P_\Omega(\rho|\mathbf{r},t) \leqslant P_0(\rho|\mathbf{r},t),$$

[1] Je jure, c'est vrai.

et notamment pour $\mathbf{r} = \rho$, on a:

$$P_Q(\rho|\rho,t) \leqslant P_\Omega(\rho|\rho,t) \leqslant P_0(\rho|\rho,t).$$

Or, l'expression de $P_Q(\rho|\rho,t)$ est connue explicitement; on a en effet:

$$P_Q(\rho|\rho,t) = \frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}}.$$

D'o

$$\frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t}\phi_n^2(\rho) \leqslant \frac{1}{2\pi t}.$$

En intgrant l'ingalit de droite sur Ω, on obtient, en se rappelant que les fonctions propres $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont normalises:

$$\sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \text{mes}(\Omega)\frac{1}{2\pi t}.$$

Intressons nous maintenant l'autre partie de notre ingalit; on commence par l'intgrer sur Q:

$$\int_Q \frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} d\rho \leqslant \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \int_Q \phi_n^2(\rho) d\rho,$$

$$4 \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant \sum_1^\infty \int_Q e^{-\lambda_n t}\phi_n^2(\rho) d\rho.$$

On va approcher Ω par l'intrieur, en le remplissant de carrs de ct a, puis en faisant tendre a vers 0; on note $N(a)$ le nombre de carrs de ct a inscrits totalement dans Ω lorsqu'on lui fait subir un tel dcoupage, et $\Omega(a) \subset \Omega$ la runion de tous ces carrs. En sommant les ingalits du type de celle ci-dessus sur tous les carrs, on trouve:

$$4N(a) \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant \sum_1^\infty \int_{\Omega(a)} e^{-\lambda_n t}\phi_n^2(\rho) d\rho \leqslant \sum_1^\infty \int_\Omega e^{-\lambda_n t}\phi_n^2(\rho) d\rho = \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t}.$$

Or, $\Omega(a)$ est runion de $N(a)$ carrs de ct a, donc $\text{mes}(\Omega(a)) = N(a).a^2$, ce qui nous donne:

$$\text{mes}(\Omega(a))\frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{\text{mes}(\Omega)}{2\pi t}.$$

Ouf! Il ne reste plus qu' estimer la valeur de la srie de gauche lorsque t tend vers 0.

4.1.1 Petit calcul intermdiaire amusant

Nous allons en fait traiter le cas d'un quivalent de la srie $\left(\left(e^{-n^2t}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en 0. Pour cela, posons

$$\forall t>0, f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2t},$$

la srie convergeant de manire vidente, puisque son terme gnral est ngligeable devant $\frac{1}{t^{17548}}$.[2] On pose galement

$$\forall t>0, \forall u\in\mathbb{R}, g_t(u)=e^{-u^2t}\chi_{[0,\infty[}.$$

Fixons enfin t¿0. Alors la fonction g_t est dcroissante, et on a $e^{-n^2t}=g_t(n)$ pour tout entier n: on va donc naturellement comparer la srie l'intgrale de la fonction g_t. Ainsi, on obtient que:

$$\int_0^{\infty} g_t(u)du \leqslant f(t) \leqslant \int_0^{\infty} g_t(u)du+1.$$

Or, comme tout le monde le sait [3], l'intgrale $\int_0^{\infty} e^{-u^2}du$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et il s'en suit que

$$\int_0^{\infty} g_t(u)du=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

En rinjectant ces valeurs dans notre ingalit sur $f(t)$, on trouve facilement que

$$f(t)\sim_{t\to 0}\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

A prsent, si la somme ne s'effectue que sur les termes pairs, qu'obtient-on? Bah, il suffit de le calculer:

$$\sum_{n \text{ pairs}} e^{-n^2t}=\sum_{p=0}^{\infty} e^{-4p^2t}=f(4t)\sim_{t\to 0}\frac{1}{4}.\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Enfin, on en dduit:

$$\sum_{n \text{ impairs}} e^{-n^2t}=\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2t}-\sum_{n \text{ pairs}} e^{-n^2t}\sim_{t\to 0}\frac{1}{4}.\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Bon, je vous le rappelle, nous ce qu'on veut, c'est un quivalent lorsque t tend vers 0 de

$$\sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2t}{2a^2}}.$$

Pour cela, on remarque que

$$\sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2t}{2a^2}}=\left(\sum_{n \text{ impairs}} e^{-\frac{n^2\pi t}{2a^2}}\right)^2.$$

[2] Terme gnral d'une srie de Riemann convergente.

[3] Pas plus tard qu'hier, je l'ai demand un clochard dans la rue...

A partir de l, il n'y a plus qu' conclure l'aide de ce qui prcde:

$$\sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \sim_{t\to 0} \frac{a^2}{4}.\frac{1}{2\pi t}.$$

4.1.2 On redevient srieux...

A partir de l, on en a presque termin avec l'tablissement de cette formule de Weyl. Revenons la dernire ingalit que nous avions pose:

$$\text{mes}(\Omega(a))\frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{\text{mes}(\Omega)}{2\pi t}.$$

En multipliant tous les membres par $2\pi t$, il vient que:

$$2\pi t \ \text{mes}(\Omega(a)) \ \frac{4}{a^2} \sum_{m,n \text{ impairs}} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 t}{2a^2}} \leqslant 2\pi t. \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \text{mes}(\Omega).$$

Bien sr, on ne sait pas si le terme du milieu admet une limite lorsque t tend vers 0, donc, si on veut ventuellement passer la limite, on ne peut faire mieux que prendre les limites inf et sup; en revanche, on connait celle du membre de gauche, grce au petit intermde que nous avons fait:

$$\text{mes}(\Omega(a)) \leqslant \lim_{t\to 0} \inf 2\pi t. \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \lim_{t\to 0} \sup 2\pi t. \sum_1^\infty e^{-\lambda_n t} \leqslant \text{mes}(\Omega).$$

Ceci tabli, il ne reste plus qu' faire tendre a vers 0, auquel cas, par continuit intrieure de la mesure de Lebesgue, la mesure de $\Omega(a)$ tend vers la mesure de Ω. Ce qui nous montre que les deux limites inf et sup sont gales, et que finalement:

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \sim_{t\to 0} \frac{\text{Mes}(\Omega)}{2\pi t}.$$

Victoire!

4.2 Un problme ouvert...

En fait, la connaissance de ce dvelopppement asymptotique de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim_{t\to 0}$ en 0 ne s'arrte pas au premier terme.

- Par exemple, si Ω est rgulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^n$, on a:

  $$\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} =_{t\to 0} t^{-n/2}(a_0 + a_1\sqrt{t} + a_2 t + a_3 t^{3/2} + ...).$$

  Autrement dit, on a un dveloppement asymptotique selon les puissances de $\sqrt{t}$, et on sait que:

  $$a_0 = \frac{\text{Mes}(\Omega)}{(4\pi)^{-n/2}},$$

$$a_1 = -\frac{1}{4}.\frac{\mathrm{Mes}(\partial\Omega)}{(4\pi)^{(n-1)/2}},$$

$$a_2 = \frac{1}{(4\sqrt{\pi})^n}\int_{\partial\Omega} q, \text{ q tant la courbure locale,}$$

ce qui nous dit que la courbure moyenne est audible. On vrifiera que le cas du coefficient a_0 dans $\mathbb{R}^2$ que nous avons trait est bien en accord avec la formule plus gnrale qui prcde.

- Il est galement possible, lorsque l'ouvert Ω est polygonal plan et qu'il contient des coupures, de connaitre, l'aide uniquement du psectre du Laplacien sur cet ouvert, la longueur et le nombre de ces coupures.

  Toujours dans le cas des ouverts polygonaux plans, on est capable, lorsqu'ils ont des "trous" de connatre le nombre n de ces trous. En effet, on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} =_{t\to 0} \frac{1}{6}(1-n) + \frac{\mathrm{Mes}(\Omega)}{2\pi t} - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{Mes}(\partial_\Omega)}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Ces quelques exemples nous montrent qu'il est possible d'accder, l'aide du spectre du Laplacien, de nombreuses proprits gomtriques de cette surface. Et la question qui se pose naturellement est la suivante: Ω est il caractris par son spectre? Dans le cas de surfaces planes, on n'a pas de rponses. Au mieux on peut reconnatre un cercle, puisque ce dernier est le seul cas d'galit pour l'ingalit isoprimtrique

$$L^2 \geqslant 4\pi\mathcal{A}.$$

En dimension 3, si l'on a affaire une surface de rvolution, alors le spectre la caractrise.

En revanche, il a t possible de rpondre ngativement la question, dans le cadre de la thorie des varits. En effet, un savant fou [4] du nom de Milnor a trouv on ne sait comment deux varits isospectrales mais non isoprimtriques de dimension 16, et qui ne sont donc pas les mmes. Puis sont venus des exemples en dimension 12, puis en dimension 8, jusqu'en 1978 o Marie France Vignras trouve un exemple de varits isospectrales non isoprimtriques en dimension 3. Donc il est clair que le spectre ne constitue pas une caractrisation de notre objet gomtrique, dans le cadre d'une thorie aussi gnrale que celle des varits.

Mais le problme reste ouvert, comme je l'ai dit plus haut, pour des surfaces en dimension deux ou trois.

Mais bon, moi j'arrte l pour la formule de Weyl...

[4] Il faut tre fou pour tudier les varits abstraites!

Chapter 5

Bibliographie

Thorie spectrale

1. HAM BREZIS **Analyse fonctionnelle, Thorie et applications**.
2. J.R. RETHERFORD,
   Hilbert spaces: Compact operators and the Trace theorem.

Equations aux drives partielles

1. HAM BREZIS **Analyse fonctionnelle, Thorie et applications**.
2. M. RENARDY, R.C. ROGERS,
   An introduction to Partial Differential Equations.
3. F. TREVES, **Basic linear Partial Differential Equations.**

Formule de Weyl

1. MARK KAC,
   Can one hear the shape of a drum?
2. HERMANN WEYL,
   ber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.
3. NOUREDINE BENKAZA, thse de Doctorat Paris 7, 1987,
   Formule de Weyl dans un ouvert plan avec coupures.
4. ISAAC CHAVEL,
   An introduction to Riemannian geometry.
5. PIERRE BERARD, sminaire BOURBAKI 705, anne 1998-99,
   Varits Riemaniennes isospectrales non-isoprimtriques.

Gomtrie diffrentielle

1. Marcel BERGER, Bernard GOSTIAUX,
   Cours de gomtrie diffrentielle
2. W. BOOTHBY,
   Introduction to differential manifolds.

Divers

1. Norbert WIENER,
   The Fourier transform and certain of its applications.
2. Walter RUDIN,
   Analyse relle et complexe.