DAVID LECOMTE
Ecole normale supérieure de Cachan
Département de mathématiques
lecomte@dptmaths.ens-cachan.fr

Polycopi de cours
de
Mathématiques
Premier cycle

Avril 99

Ce document a été réalisé par David LECOMTE.
Sa reproduction par tout moyen que ce soit, sans l'accord de son auteur, est interdite
conformément aux articles L111-1 et L122-4 du code de la propriété intellectuelle.

Contents

I	Algre linare	5
1	Espaces vectoriels	9
1.1	Cours	9
1.1.1	Dfnitions	9
1.2	Thorie de la dimension dans les espaces vectoriels	11
1.2.1	Notions de dpendance et d'indpendance linaires	11
1.2.2	Dimension d'un espace vectoriel	13
1.3	Exercices	14
2	Applications linaires- Matrices	15
2.1	Applications linaires	15
2.1.1	Dfnitions	15
2.1.2	Premiers rsultats- Approche naturelle des matrices	16
2.2	Matrices	18
2.2.1	Gnralits	18
2.2.2	Endomorphismes et matrices carres	20
2.3	Exercices	21
3	Rduction des endomorphismes	23
3.1	Rappels: Dterminants	23
3.2	Diagonalisation des endomorphismes	25
3.2.1	Prliminaires	25
3.2.2	Diagonalisation	27
3.2.3	Polynmes d'endomorphismes	28
3.3	Exercices	32
4	Espaces euclidiens	33
4.1	Espaces prhilbertiens: rappels	33
4.2	Espaces euclidiens	35
4.2.1	Gnralits	35
4.2.2	Automorphismes orthogonaux	36
4.2.3	Isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual- Adjoint d'un endomorphisme	37
4.3	Exercices	40
II	Analyse	41
5	Notions de topologie des evn	45

6	Analyse squentielle	47
6.1	Suites valeurs dans un evn	47
6.2	Sries relles ou complexes	50
6.2.1	Gnralits	50
6.2.2	Sries relles positives	51
6.2.3	Sries de rfrence	51
6.2.4	Critre des sries alternes	52
6.2.5	Produit de Cauchy de deux sries-Exponentielle	53
6.3	Exercices	54
7	Suites et sries de fonctions	57
7.1	Suites de fonctions	57
7.2	Sries de fonctions	58
7.3	Exercices	59
8	Intgration	61
8.1	Intgration sur un segment	61
8.1.1	Prliminaire	61
8.1.2	Construction de l'intgrale	62
8.1.3	Lien entre intgrale et primitive	65
8.2	Intgration sur un intervalle quelconque	66
8.2.1	Fonctions relles positives	67
8.2.2	Fonctions relles et complexes	68
8.2.3	Thormes de convergence	69
8.3	Exercices	70

Part I

Algre linaire

Cette partie a pour but de vous présenter les bases de l'algèbre linéaire: les généralités sur les espaces vectoriels et les matrices, puis nous nous attaquerons au problème de la réduction des endomorphismes. Enfin, un dernier chapitre sur les espaces hilbertiens nous amènera au théorème spectral.

Nous omettrons la partie du cours sur les déterminants, car elle est très lourde en notations, et n'a pour but que de montrer l'existence de formes n -linéaires sur un espace vectoriel en exhibant l'une d'entre elle qui est justement le déterminant. Toutefois, les résultats essentiels sur les déterminants seront rappelés lorsqu'il s'agira d'étudier la réduction des endomorphismes.

Enfin, une dernière remarque: l'algèbre linéaire n'est pas difficile en soi. Toute cette théorie peut paraître extrêmement abstraite et déroutante, mais ce n'est pas le cas, du moins si on l'aborde bien: en effet, elle a été tablée pour généraliser les notions de transformations de notre espace trois dimensions. Les notions introduites l'ont donc souvent été de façon intuitive, en voyant comment se passent les choses en dimension 3, et en les tendant au cas général. Il est clair qu'on ne peut s'imaginer un espace vectoriel de dimension 4,5, etc... mais il faut bien se dire que tout se passe comme dans notre bon vieux espace trois dimensions. Et puis, force de manipuler ces choses là, on se retrouve un beau matin les maîtriser et tout ça devient tout fait concret. Notamment, une fois qu'on s'est familiarisé avec la structure d'espace vectoriel (1^{er} chapitre), tout ce qui suit paraît assez naturel. En bref, ne pas se laisser impressionner par l'algèbre linéaire, bien voir de quoi on parle en essayant de comprendre la notion concrète sous-jacente, sont les clés du succès. Ceci dit, tous les problèmes ne peuvent pas être traités de cette manière, mais déjà le fait de dramatiser rend les choses plus faciles...

Chapter 1

Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou le corps des réels.

1.1 Cours

1.1.1 Définitions

Définition: Soit $(E, +)$ un groupe commutatif. On dit que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ds qu'on a défini une application

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda.x\end{aligned}$$

telle que:

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) &= \lambda.x + \lambda.y, \\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda_1 + \lambda_2).x &= \lambda_1 x + \lambda_2 x, \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.0 &= 0, \\ \forall x \in E, 1.x &= x.\end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés scalaires, et les éléments de E seront appelés vecteurs. $\diamond$

On appellera sous-espace vectoriel de E toute partie de E qui soit un espace vectoriel (logique!). On vérifie alors facilement qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E , ce qui va nous permettre d'aborder la notion de sous-espace engendré par une partie de E :

Théorème et définition: Soit A une partie de E . On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A . Alors $\mathcal{H}$ contient un plus petit élément au sens de l'inclusion, appelé sous-espace vectoriel engendré par A , et on le note $\text{Vect}(A)$. En outre, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A .

Démonstration: Posons donc $G = \bigcap_{F \in \mathcal{H}} F$, intersection de tous les sous-espaces de E contenant A . D'après la remarque faite plus haut, G est un sous-espace de E , et il est clair qu'il contient A : $G \in \mathcal{H}$. De plus, G est dans tous les F de $\mathcal{H}$ puisqu'il s'agit de leur intersection. On en déduit que G est le plus petit élément de $\mathcal{H}$ au sens de l'inclusion ce qui démontre la première partie de la proposition.

Montrons maintenant que G est bien l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A . Pour cela, posons:

$$G' = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k, n \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Par définition, G' est stable par combinaisons linéaires¹ et il contient 0 : c'est donc un sous-espace vectoriel de E . En outre, il contient tous les éléments de A , donc $G' \in \mathcal{H}$. On en déduit, G tant le plus petit élément de $\mathcal{H}$, que G est inclus dans G' . Réciproquement, G est un sous-espace de E contenant A : il contient donc toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A ; conclusion: G' est inclus dans G . $\diamond$

Passons maintenant la définition de la somme de deux sous-espaces:

Définition: Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On note $E_1 + E_2$ le sous-espace engendré par $E_1 \cup E_2$. Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont n sous-espaces de E , on pose $\sum_{k=1}^n E_k = \text{Vect} \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right)$. $\diamond$

Proposition: $\sum_{k=1}^n E_k = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k, (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \right\}$.

Démonstration: Il suffit d'établir cette proposition dans le cas $n = 2$, le reste s'en suit par une récurrence immédiate. Posons $F = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k, (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \right\}$. Alors F contient $E_1 \cup E_2$ et est un sous-espace de E de manière évidente. Comme $E_1 + E_2$ est le plus petit sous-espace de E contenant $E_1 \cup E_2$, on en déduit que $E_1 + E_2 \subset F$. Réciproquement, soit $z \in F$. Alors il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $z = x_1 + x_2$. z s'écrit donc comme combinaison linéaire finie d'éléments de $E_1 \cup E_2$. Il s'en suit, d'après le théorème précédent que $z \in \text{Vect}(E_1 \cup E_2) = E_1 + E_2$. z ayant été choisi quelconque dans F , on a bien l'inclusion réciproque $F \subset E_1 + E_2$. $\diamond$

Passons maintenant la notion de somme directe de sous-espaces vectoriels:

Définition: On dira que les sous-espaces $E_1, \dots, E_n$ de E sont en somme directe si et seulement si:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, (x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0).$$

On notera alors $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$. $\diamond$

Proposition: Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. la somme $S = \sum_{k=1}^n E_k$ est directe,
2. tout vecteur de S s'écrit de manière unique comme somme de vecteurs des $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Démonstration: Supposons que la somme S soit directe. Soit $z \in S$. Soient $z = z_1 + \dots + z_n = x_1 + \dots + x_n$ deux décompositions de z en somme d'éléments des $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$. On a alors

$$(z_1 - x_1) + \dots + (z_n - x_n) = 0.$$

La somme S tant directe, on a donc $z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n$. z admet donc une décomposition unique en tant que somme d'éléments des $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ et la propriété 2 est établie.

Réciproquement si la propriété 2 est vraie, alors, notamment, 0 admet une décomposition unique, ce qui dit bien que la somme S est directe. $\diamond$

Terminons-en maintenant avec les préliminaires:

Définition: Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que l'on ait $E = E_1 \oplus E_2$. On dit alors que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E . $\diamond$

¹En effet, la somme de deux combinaisons linéaires finies d'éléments de A est encore une combinaison linéaire finie d'éléments de A , et le produit par un scalaire d'une telle combinaison linéaire est encore une combinaison linéaire finie d'éléments de A .

1.2 Thorie de la dimension dans les espaces vectoriels

1.2.1 Notions de dpendance et d'indpendance linaires

Dfinitions: Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . On dira que cette famille est libre (ou encore que ces vecteurs sont linaires indpendants) si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0 \right).$$

Soit I une famille d'indices quelconque (pas forcément finie), et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexe par I . Cette famille sera dite libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Une famille de vecteurs de E qui n'est pas libre est dite lie. $\diamond$

Cette simple notion de famille libre - famille lie va nous faciliter l'tude des espaces vectoriels, comme nous allons le voir.

Il est clair que toute sous-famille d'une famille libre est libre, et qu'une famille est lie si et seulement si il existe une relation de dpendance linaires finie coefficients non tous nuls entre ses lments.

Thorme: Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E . Soit $x \in E$, tel que $\mathcal{A} = (x_i)_{i \in I} \cup \{x\}$ soit une famille lie. Alors $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$.

Dmonstration: La famille $\mathcal{A}$ est lie, donc on a une relation de dpendance coefficients non tous nuls:

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j + \mu x = 0$$

o J est une partie finie de I . Du coup, μ ne peut tre nul, car sinon, compte tenu de la libert des $(x_j)_{j \in J}$, tous les $(\lambda_j)_{j \in J}$ seraient nuls et on aurait un bug. Par consquent, on a

$$x = -\frac{1}{\mu} \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$$

et ce dernier vecteur est bien dans $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$. $\diamond$

Dfinitions: On appelle base d'un espace vectoriel toute famille la fois libre et gnratrice.

On dira que E est de dimension finie si et seulement si il admet une partie gnratrice finie. $\diamond$

Dsormais, on ne s'intressera qu'aux espaces vectoriels de dimension finie pour plusieurs raisons: tout d'abord, parce que l'tude d'un espace de dimension infinie est limite tant qu'on n'y a pas dfini de topologie, alors que dans un espace de dimension finie, comme nous le verrons en analyse, toutes les topologies sont quivalentes, donc la topologie n'a aucune importance; la deuxime raison, lie la premire, est que les espaces de dimension finie sont beaucoup plus sympa tudier. Et puis, ce sont les seuls dont l'tude est votre programme...

Thorme: De toute famille gnratrice de E on peut extraire une base.

Dmonstration: Soit $G = (x_1, \dots, x_n)$ une famille gnratrice de E . Si G est libre, c'est bon, le thorme est dmontr. Sinon, c'est qu'elle est lie, et dans ce cas, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls (par exemple $\lambda_n \neq 0$), tels que l'on ait:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0, \text{ ou encore } x_n = -\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k.$$

Il s'en suit, G tant gnratrice, que $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est aussi gnratrice. Si elle est libre, on a gagn, sinon on recommence, encore et encore, jusqu' arriver une famille libre, ce qui doit forcment arriver: si au bout du compte il ne nous reste plus qu'un vecteur, il constitue lui seul une famille gnratrice de E qui n'est pas rduit $\{0\}$, donc ce vecteur est non nul et il constitue lui seul une famille libre et gnratrice de E ; en gros, c'est une base. $\diamond$

Vient maintenant un petit lemme technique, trs sympa pour nous aider introduire la notion de dimension qui fera l'objet du paragraphe suivant.

Thorme: Soit n un entier suprieur 2. Si n vecteurs de E sont combinaison linaire de p vecteurs de E , avec $p < n$, alors ils sont lis.

Dmonstration: Il suffit d'tablir le thorme dans le cas $n = p + 1$: en effet, si $n = p + q$, on prend notre famille de p vecteurs, on lui adjoint $q - 1$ fois le vecteur nul, ce qui nous fait une famille de $n - 1$ vecteurs vrifiant la propriit du thorme. Ce rsultat prliminaire ayant t tabli, on va procder maintenant par rcurrence:

$\mathcal{P}(p)$: $p + 1$ vecteurs combinaison linaire de p vecteurs sont lis.

- Soient x et y deux vecteurs qui soient chacun combinaison linaire d'un mme vecteur z :

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y = \mu z \end{cases}$$

d'o $\mu x - \lambda y = 0$, ce qui nous dit bien que x et y sont lis. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie. Soient $(x_1, \dots, x_{p+2})$ $p + 2$ vecteurs qui soient combinaison linaire de $p + 1$ vecteurs qu'on notera $(y_1, \dots, y_{p+1})$:

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_{1,k} y_k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{p+2} = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_{p+2,k} y_k \end{cases}$$

Si $\forall i \in \{1, \dots, p + 1\}, \lambda_{p+2,i} = 0$, alors c'est que $x_{p+2} = 0$ et la famille est lie. Sinon, quitte renumroter les $(y_i)_{1 \leq i \leq p+1}$, on peut supposer que $\lambda_{p+2,p+1} \neq 0$. On pose alors:

$$\forall i \in \{1, \dots, p + 1\}, z_i = \lambda_{p+2,p+1} x_i - \lambda_{i,p+1} x_{p+2}.$$

On constate alors que les $(z_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ sont combinaison linaire des $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, et d'aprs l'hypothse de rcurrence, ils sont lis. Il existe donc une relation de dpendance entre $z_1, \dots, z_{p+1}$, qui se rpercute en une relation de dpendance linaire entre $x_1, \dots, x_{p+2}$ (que je ne vais pas crire ici, car l'expression est quand mme assez monstrueuse), et on en dduit que cette famille est lie.

$$\text{On a donc: } \mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p + 1),$$

et la propriit $\mathcal{P}$ est hrditaire.

- Par rcurrence, le thorme est tabli. $\diamond$

1.2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Dans le paragraphe prcdent, nous avons abord la notion de dimension en disant ce qu'est un espace de dimension finie, mais on n'est pas plus avanc sur ce qu'est la dimension d'un espace. Quoique... On commence quand mme voir venir le truc: on a bien envie de dire que la dimension est le cardinal d'une base, mais encore faudrait-il que cette grandeur soit stable, c'est dire qu'elle ne dpende pas de la base choisie. C'est dmontrer ce dernier rsultat que va nous servir le thorme qu'on vient de voir.

Thorme et dfnition: Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le mme nombre d'lments, appel dimension de E .

Dmonstration: Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , de cardinal respectif n et n' . On ne peut avoir $n < n'$: en effet, si tel tait le cas, $\mathcal{B}$ tant gnratrice, les n' vecteurs de $\mathcal{B}'$ seraient tous combinaison linaira des n vecteurs de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}'$ serait lie; de mme, on ne peut avoir $n > n'$. Du coup, il ne reste que $n = n'$: deux bases de E ont bien le mme nombre d'lments. $\diamond$

On n'a plus besoin maintenant que de quelques thormes pour aborder l'tude des applications linaires:

Thorme de l'change: Soit E un espace-vectoriel de dimension finie n , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $p \leq n - 1$, et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Alors:

$$\exists (i_{p+1}, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}, \text{ tels que } (x_1, \dots, x_p, e_{i_{p+1}}, \dots, e_{i_n}) \text{ soit une base de } E.$$

Dmonstration: Nous allons tablir ce thorme par rcurrence, en posant:

$$\forall p \in \{1, \dots, n-1\}, \mathcal{P}(p) : \exists (i_{p+1}, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}, \text{ tels que } (x_1, \dots, x_p, e_{i_{p+1}}, \dots, e_{i_n}) \text{ soit une base de } E.$$

- Si $p = n - 1$: on note alors $\mathcal{F}_i = (x_1, \dots, x_{n-1}, e_i)$. Si aucune de ces familles n'est une base de E , c'est que chacun des $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est combinaison linaira de $n-1$ vecteurs, donc ils sont lis. C'est -trs lgrement- contradictoire avec le fait que $\mathcal{B}$ est une base. Par consquent, il existe i compris entre 1 et n tel que $\mathcal{F}_i$ soit une base de E . $\mathcal{P}(n-1)$ est donc vraie.
- Supposons $\mathcal{P}$ satisfaite au rang $p + 1$. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E . Alors le mme raisonnement que plus haut nous montre qu'il existe i , tel que $(x_1, \dots, x_p, e_i)$ soit libre. Il ne reste qu'appliquer l'hypothse de rcurrence pour dire qu'on peut effectivement complter cette dernire famille l'aide de vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On a donc

$$\mathcal{P}(p + 1) \Rightarrow \mathcal{P}(p).$$

- On en dduit par rcurrence que le thorme est vrai pour tout $p < n$, ce qui achve la dmonstration. $\diamond$

Ce thorme admet bien sr comme corollaire immdiat le thorme de la base incomplte:

Thorme de la base incomplte: Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E . Alors il existe $x_{p+1}, \dots, x_n$, $n - p$ vecteurs de E , tels que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ forme une base de E .

Ainsi que le corollaire du corollaire:

Corollaire: TOUT SOUS-ESPACE D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE ADMET UN SUPPLMENTAIRE.

A noter que tous les thormes qui prcdent (existence de bases, thorme de l'change, existence de supplémentaire) sont galement vrais en dimension infinie, mais ncessitent l'utilisation de l'axiome du choix, qui comme son nom l'indique est un axiome, et est donc admis. On peut donc admettre ces thormes comme vrais en dimension infinie, alors qu'on les dmontre en dimension finie.

Dfinition: Etant donn E espace vectoriel de dimension finie, et V un sous-espace de E non rduit au vecteur nul, toute base de E obtenue en comptant une base de V est appele base de E adapte V . $\diamond$

Dfinition: Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appele rang de cette famille la dimension du sous-espace de E qu'elle engendre. $\diamond$

Thorme: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, qui soit somme directe de sous-espaces $E_1, \dots, E_p$. Alors on obtient une base de E en runissant les bases de chacun de $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$. On a donc

$$\dim E = \dim E_1 + \dots + \dim E_p.$$

1.3 Exercices

1. Soient $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs indpendants d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Etudier l'indpendance des n vecteurs:

- $u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_n - u_1$.
- $u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_n + u_1$.

2. On conside l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, et on note pour $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lcl} e_r & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto e^{rx} \end{array}$$

Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (e_r)_{r \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient U et V deux sous-espaces de E . Montrer que l'on a:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , soient F_1 et F_2 deux sous-espaces de E , de mme dimension p . Montrer que F_1 et F_2 admettent un supplémentaire commun.

Chapter 2

Applications linaires- Matrices

L'objet de ce chapitre est l'étude des morphismes d'espaces vectoriel (c'est à dire des applications qui respectent la structure d'espace vectoriel), aussi appelés applications linaires. Nous verrons comment on peut passer, dans le cas d'espaces de dimension finie, du cadre abstrait d'application linaires à une représentation plus concrète qui est la représentation matricielle. Pour cela, il est indispensable d'avoir bien assimilé le chapitre précédent, notamment l'utilité des bases, car nous allons parfois nous amuser à jongler avec, et il faut toujours se rappeler ce dont on parle pour ne pas s'y perdre.

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

2.1 Applications linaires

2.1.1 Définitions

Définition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et soit f une application de E dans F . On dit que f est linaires si et seulement si:

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f x + \mu f y.$$

On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels. $\diamond$

On voit qu'une application linaires est notamment un morphisme de groupes, et comme tout morphisme de groupe, elle envoie 0 sur 0, et un élément sur son opposé. À présent, place un peu de vocabulaire:

Définitions: On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linaires de E dans F ; une application linaires bijective est appelée isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans le cas où $E = F$, les applications linaires sont appelées endomorphismes de E , et leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E)$. Cet ensemble, muni de l'addition et de la composition des applications constitue un anneau, dont les éléments inversibles sont les bijections linaires de E , appelées automorphismes de E ; leur ensemble est noté $\mathcal{GL}(E)$ et constitue un groupe pour la composition.

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linaires sur E , et leur ensemble est noté E^* . On l'appelle dual de E . $\diamond$

Définitions: Étant donné $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f x = 0\} \text{ et } \text{Im}(f) = \{f x, x \in E\}.$$

Il est clair que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de E et F . $\diamond$

Un petit rsultat prliminaire, que tout le monde connat:

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

$\diamond$

2.1.2 Premiers rsultats- Approche naturelle des matrices

Tout d'abord, introduisons la notion de projection: soient F et G deux sous-espaces de E , qui soient supplémentaires dans E . Alors tout vecteur x de E se dcompose de manire unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . On appelle projection sur F parallèlement G l'application qui $x \in E$ associe sa composante suivant F : il s'agit tout simplement d'une gnralisation de ce qu'on appellait projection dans le secondaire. A noter que si p est un projecteur, alors $p \circ p = p$, p est linéaire, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = G$.

Dfnition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f la dimension de $\text{Im}(f)$. $\diamond$

Thorme du rang: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Tout supplémentaire du noyau est isomorphe l'image. Si E est de dimension finie, on a

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim E.$$

Dmonstration: Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}f$. On a alors $E = \text{Ker}f \oplus S$. Il nous faut chercher une bijection linéaire entre S et $\text{Im}f$. Un bon candidat est l'application b dfinie sur S , coïncidant avec f^1 . Alors b est linéaire puisque f l'est. Montrons qu'il s'agit d'une bijection.

- Pour l'injectivité, il suffit de montrer que $\text{Ker}b$ est rduit $\{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}b$. On a alors $bx = fx = 0$, donc $x \in \text{Ker}f$. En outre, x est dans S . Comme S et $\text{Ker}f$ sont en somme directe, leur intersection est rduite $\{0\}$, donc $x = 0$.

b est donc injective.

- Montrons que tout lment de $\text{Im}f$ est atteint par b : soit $y \in \text{Im}f$. Alors il existe $x \in E$, tel que $fx = y$. Or, $E = \text{Ker}f \oplus S$, donc

$$\exists!(x_1, x_2) \in \text{Ker}f \times S, \text{ tq } x = x_1 + x_2 \text{ (proprité de la somme directe.)}$$

On a alors:

$$fx = f(x_1 + x_2) = fx_1 + fx_2.$$

Or, $x_1 \in \text{Ker}f$ donc $fx_1 = 0$, et $x_2 \in S$, donc $fx_2 = bx_2$. Il s'en suit donc:

$$\exists!x_2 \in S, bx_2 = y,$$

ce qui nous assure la surjectivité de b

¹On parle de morphisme induit par f sur S

On a donc bien montr que tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image.

À présent, si E est de dimension finie, on a $\dim(\text{Im}(f)) = \dim S$ car ces espaces sont isomorphes et $E = S \oplus \text{Ker}(f)$, et on en déduit l'égalité proposée.

◇

Corollaire: Deux supplémentaires d'un même sous-espace de E sont isomorphes.

Preuve: Soit F un sous-espace de E et soient G_1, G_2 deux supplémentaires de F . On considère alors la projection p sur G_1 parallèlement à F . Alors $\text{Im}(p) = G_1$, $\text{Ker}(p) = F$ et tout supplémentaire de F est isomorphe à G_1 . Il s'en suit que G_1 et G_2 sont isomorphes. ◇

Du coup, on a un résultat important dans le cas où E et F sont de même dimension finie:

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Venons-en enfin à ce qui motive l'introduction des matrices pour représenter les morphismes d'espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F . Quel que soit i compris entre 1 et n , fe_i est dans F , donc s'exprime dans la base $\mathcal{C}$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, fe_i = \sum_{k=1}^p a_{k,i} u_k.$$

La simple donnée de ces n^2 coefficients que sont les $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ nous permet de connaître complètement l'application f : en effet, soit x un vecteur de E : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Par linéarité de f , on a:

$$fx = \sum_{i=1}^n x_i fe_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^p a_{j,i} u_j \right)$$

et une petite interversion de somme nous donne la décomposition de fx suivant la base $(u_1, \dots, u_p)$:

$$fx = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i \right) u_j.$$

À présent, si G est un troisième espace vectoriel, rapportons une base $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_q)$, et si g est une application linéaire de F dans G , alors on peut faire le même travail pour g :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, gu_j = \sum_{k=1}^q b_{k,j} v_k$$

et un calcul pas très sympathique relie nous donne:

$$(f \circ g)x = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,j} \right) x_j \right) v_k.$$

Toutes ces belles choses nous amènent à poser:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f), \quad \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{q,1} & \dots & b_{q,p} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g), \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p b_{1,i}a_{i,1} & \dots & \sum_{i=1}^p b_{1,i}a_{i,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p b_{q,i}a_{i,1} & \dots & \sum_{i=1}^p b_{q,i}a_{i,n} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f).$$

Ces tableaux de scalaires sont appels matrice de f (resp. g , $g \circ f$) relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$), et nous voyons que l'étude des matrices s'inscrit tout naturellement dans celle des applications linaires et les rapproche un petit peu de notre perception.

2.2 Matrices

2.2.1 Gnralits

Dfnition: On appelle matrice $n * p$ coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau n lignes et p colonnes dont les cases sont occupes par des lments de $\mathbb{K}$. Leur ensemble est not $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.² On notera $(a_{i,j})_{i,j}^{n,p}$ la matrice dont le terme situ la i -ime ligne et la j -ime colonne est $a_{i,j}$. $\diamond$

Propriet fondamentale: Si E et F sont deux espaces vectoriels rapports respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, de dimension respective n et p , alors $\mathcal{L}(E, F)$ est naturellement en bijection avec $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, par l'application dfinie plus haut qui une application linaire de E dans F associe sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Consquence: L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension np .

Dfnition: On dfnit donc le produit de deux matrices de manire respecter cet isomorphisme: si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on appelle matrice produit AB l'lment de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de terme gnral

$$(AB)_{i,j}^{n,q} = \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k}b_{k,j} \right)_{i,j}^{n,q}$$

De tout ce qui prde, on voit qu'tant donn un espace vectoriel E de dimension n , un espace F de dimension p , et des bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on peut assimiler E $\mathbb{K}^n$, F $\mathbb{K}^p$ et un lment de $\mathcal{L}(E, F)$ par un lment de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.⁴ Du coup, si X represente le n -uplet des coordonnes de $x \in E$, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est represent par la matrice A , et si Y represente le p -uplet des coordonnes de $fx \in F$, on a:

$$y = fx \Leftrightarrow Y = AX.$$

Mais comme vous aurez pu le constater, on ne peut pas, par exemple, associer de manire intrinsque une matrice une application linaire: il faut d'abord se donner la base de dpart et la base d'arrive. Rciproquement, une matrice ne represente une application linaire de E dans F qu'une fois un choix des bases fait. Du coup, comment se rpercute un changement de base sur l'allure d'une matrice?

Eh bien, c'est trs simple. Juste un peu lourd en notations si on ne veut pas se perdre, mais trs simple. On se donne deux bases

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ et } \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n) \text{ de } E$$

²On fait tout simplement la somme des termes correspondant deux matrices pour obtenir la somme de ces matrices, et on multiplie tous les coefficients par un mme scalaire lorsqu'on veut dfinir la multiplication par ce scalaire.

³En representant un vecteur par le n ou p -uplet de ses coordonnes par rapport la base concerne.

⁴Par la construction faite plus haut, la matrice est obtenue en plaçant en colonnes les images des vecteurs de base dans l'ordre o ils viennent.

et deux bases

$$\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p) \text{ et } \mathcal{C}' = (v'_1, \dots, v'_p) \text{ de } F,$$

ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et A' celle relative aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. On suppose en outre connaître les relations entre les bases d'un mme espace:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u'_i = \sum_{k=1}^n p_{k,i} u_k,$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, v'_i = \sum_{k=1}^p q_{k,i} v_k.$$

Notant $P = (p_{i,j})_{i,j}^{n,n}$ et $Q = (q_{i,j})_{i,j}^{p,p}$ ⁵, on voit qu'on a:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, U_i = P U_i \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, p\}, V'_i = Q V_i.$$

Il s'en suit qu'tant donn $x = \sum_{k=1}^n x_k u_k = \sum_{k=1}^n x'_k u'_k \in E$, represent par X et X' , on a:

$$x = \sum_{k=1}^n x'_k u'_k = \sum_{k=1}^n x'_k \left(\sum_{j=1}^n p_{j,k} u_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n p_{j,k} x'_k \right) u_j.$$

Cel nous dit exactement que $X = P X'$. La matrice de passage fournit donc les coordonnes dans l'ancienne base en fonction des nouvelles.

Donnons enfin l'expression de A' en fonction de A : soit $x \in E$ represent respectivement par X et X' , on note $y = f x$ et on le represente par Y et Y' . On a alors:

$$X = P X', Y = Q Y', Y = A X, Y' = A' X'.$$

De l on dduit tout naturellement que $Y' = Q^{-1} A P X'$ ⁶. D'o le formulaire de changement de base:

$$X = P X', Y = Q Y', A' = Q^{-1} A P.$$

A noter que ces formules ne sont pas savoir par cœur, mais plutt savoir retrouver. Elles nous amnent tout naturellement poser la dfnition suivante:

Dfnition: Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont dites **quivalentes si et seulement si il existe deux matrices inversibles** $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = Q A P$. $\diamond$

Consquence: Les matrices d'une mme application lineaire sont equivalentes entre elles.

On vrifie aisement qu'on a ainsi dfini une relation d'equivalence sur les matrices.

Thorme: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, de rang r . Il existe un choix de bases de E et F tel que la matrice de f relativement ces bases soit:

$$\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{p-r,n-r} & 0_{p-r,r} \end{pmatrix}$$

Dmonstration: On a d'après le thorme du rang $\dim(\text{Ker } f) = n - r$. Soit $(u_1, \dots, u_{n-r})$ une base de $\text{Ker } f$, qu'on complte en $(u_1, \dots, u_n)$ base de E . Montrons

⁵Ces matrices sont appeles matrices de passage, respectivement de $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$, et de $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$.

⁶L'inversibilit de Q ne pose aucun probleme dans la mesure o Q peut tre vu comme un automorphisme de F .

que la famille $(fu_{n-r+1}, \dots, fu_n)$ est libre: soit une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs:

$$\sum_{k=n-r+1}^n \lambda_k fu_k = 0 = f \left(\sum_{k=n-r+1}^n \lambda_k u_k \right).$$

Il s'en suit que $\sum_{k=n-r+1}^n \lambda_k u_k$ est dans $\text{Ker} f$; ce vecteur est aussi dans le supplémentaire que nous avons construit en complétant la base de $\text{Ker} f$. L'intersection de ces deux sous-espaces de E tant réduite au vecteur nul, on a

$$\sum_{k=n-r+1}^n \lambda_k u_k = 0.$$

Par liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n)$, tous les $(\lambda_k)_{k \in \{n-r+1, \dots, n\}}$ sont nuls, ce qui dit bien que la famille $(fu_{n-r+1}, \dots, fu_n)$ est libre et constitue donc une base de $\text{Im} f$.

On la complète en une base $(fu_{n-r+1}, \dots, fu_n, v_1, \dots, v_{p-r})$ de F et on vérifie aisément que la matrice de f relativement aux deux bases qu'on vient de construire est de la forme voulue. $\diamond$

Définition: Il est facile de voir que toutes les applications linéaires qu'on peut associer à une même matrice ont même rang. C'est ce qu'on appellera **rang de la matrice considérée**. $\diamond$

Compte tenu de la façon dont on a construit les matrices à partir des applications linéaires, il vient aisément que le rang d'une matrice $p \times n$ est aussi le rang dans $\mathbb{K}^n$ de la famille de ses vecteurs colonnes. ⁷ Nous admettrons qu'il s'agit aussi du rang dans $\mathbb{K}^p$ de la famille de ses vecteurs lignes.

Conséquence: Toute matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente

$$C_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{p-r,n-r} & 0_{p-r,r} \end{pmatrix}$$

Corollaire: Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

2.2.2 Endomorphismes et matrices carrées

Nous allons donner ici des petites généralités sur les endomorphismes d'un espace vectoriel, et sur les matrices carrées. Leur étude plus poussée sera faite dans le chapitre suivant concernant la réduction des endomorphismes.

De même que la composition de deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ n'a aucun sens si $E \neq F$, le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'a aucun sens moins que $n = p$. Cela motive l'étude plus approfondie des endomorphismes d'un espace vectoriel, ou de leur pendant matriciel: les matrices carrées.

Définition: On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$. Cet ensemble muni de sa structure d'espace vectoriel et du produit (maintenant possible, car le nombre de colonnes est égal au nombre de lignes) constitue une $\mathbb{K}$ -algèbre.

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication. Cet ensemble est naturellement en bijection avec le groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n lorsque celui-ci est muni d'une base. $\diamond$

⁷C'est à dire, on le rappelle, la dimension du sous-espace engendré dans $\mathbb{K}^n$ par ses vecteurs colonnes.

Si on reprend le travail effectué sur les changements de bases dans la section précédente, on se retrouve (avec les mêmes notations, bien sûr) avec $P = Q$. D'où $A' = P^{-1}AP$. D'où la définition suivante:

Définition: Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables ou conjuguées si et seulement si il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, telle que: $B = P^{-1}AP$. $\diamond$

Nous allons maintenant définir une forme linéaire sur les matrices carrées, particulièrement intéressante dans la mesure où, comme nous le verrons, elle est invariante par conjugaison.

Définition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par définition, la trace de A , notée $\text{Tr}A$, est la somme des termes diagonaux de A :

$$\text{Tr}A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

$\diamond$

Cette application est clairement une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et elle possède la propriété suivante:

Propriété:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Démonstration: La preuve de cette égalité repose sur un simple calcul; si $1 \leq i, j \leq n$:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} \quad \text{et} \quad (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,j}.$$

D'où:

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i}a_{i,k} \right) = \text{Tr}(BA).$$

$\diamond$

Conséquence: Deux matrices semblables ont même trace.

Définition: Si $f \in \mathcal{L}(E)$, toutes les matrices pouvant représenter f sont semblables, donc ont même trace. Par définition, c'est la trace de f . $\diamond$

2.3 Exercices

1. Soit M une matrice carrée de taille n , telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, |a_{j,j}| > \sum_{k \neq j} |a_{j,k}|.$$

Montrer que M est inversible.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace vectoriel de dimension n . On note:

$$\forall p \in \mathbb{N}, K_p = \text{Ker} f^p \quad \text{et} \quad I_p = \text{Im} f^p.$$

- Montrer que les suites K et I sont respectivement croissante et décroissante.
 - Montrer qu'il existe un rang $P \leq n$ tel que $K_{P+1} = K_P$.
 - En déduire que $\forall p \geq P, K_p = K_P$ et $I_p = I_P$.
3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E . Montrer que $f^n = 0$.
 4. Soient n et p deux entiers strictement positifs. Soit $\{A_1, \dots, A_p\}$ un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A_1 + \dots + A_p)$ est divisible par p .

Chapter 3

Rduction des endomorphismes

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ce chapitre est en quelque sorte l'aboutissement de l'algèbre linéaire. Tout ce que nous avons vu et introduit précédemment avait pour unique but de présenter proprement la théorie spectrale.

L'idée de cette théorie est simple: un endomorphisme f de E , lorsqu'il est étudié dans une base quelconque n'est pas forcément évident à cerner, même sous forme de matrice (lorsque E est de dimension finie). Du coup, on s'interroge sur la possibilité de choisir judicieusement la base d'étude, de manière à simplifier les choses, l'idéal étant de trouver une base de E dans laquelle la matrice de f sera diagonale: on ne peut pas faire plus simple!

C'est cette tâche que nous allons nous atteler, après quelques rappels sur les déterminants.

3.1 Rappels: Déterminants

Définitions:

- Soit E un espace vectoriel de dimension n . On appelle forme n -linéaire sur E toute application f de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire en chacune des variables.

- f sera dite alterne si et seulement si:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\exists i \neq j \text{ tq } x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0).$$

- f sera dite antisymétrique si et seulement si:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j, f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

- f sera dite symétrique si et seulement si:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j, f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

- On note $\mathcal{L}_n(E)$ (resp. $\mathcal{S}, \mathcal{A}$) l'ensemble des formes n -linéaires (resp. symétriques, antisymétriques).

◇

Théorèmes en vrac:

- $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f$ est alterne.
- $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous espaces de $\mathcal{L}_n(E)$ et sont en somme directe.
- Deux lments de $\mathcal{A}$ forment une famille lie.
- Une forme n -linaire alterne s'annule sur une famille de vecteurs si et seulement si cette famille est lie.

Dfnitions:

- On pose pour $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{Det}A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

- Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on appelle mineur d'ordre (i, j) la matrice obtenue en supprimant dans A la i -me ligne et la j -me colonne, et on le note $A_{i,j}$. On dfinit alors par rcurrence une application $\mathbf{Det}$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ par:

$$\mathbf{Det}A = |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \mathbf{Det}A_{i,1}.$$

- On dfinit enfin le dterminant sur E relativement une base $\mathcal{B}$: si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\mathbf{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est le dterminant de la matrice des coordonnes $(X_1, \dots, X_n)$ relativement $\mathcal{B}$.

◇

Propriets:

- $\mathbf{DET}_{\mathcal{B}}$ EST L'UNIQUE FORME n -LINAIRE ALTERNE SUR E QUI PRENNE LA VALEUR 1 SUR LA FAMILLE $\mathcal{B}$.
- LA DFNITION DU DTERMINANT SUR LES MATRICES SEMBLAIT PRIVILGIER LE DVELOPPEMENT PAR RAPPORT LA PREMIRE COLONNE; EN FAIT, LE DTERMINANT PEUT TRE DVELOPP PAR RAPPORT N'IMPORTE QUELLE LIGNE OU COLONNE, SUIVANT LA FORMULE:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K}), \forall i \in \{1, \dots, n\} :$$

$$\mathbf{DET}A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} |A_{j,i}|.$$

- UNE MATRICE EST INVERSIBLE SI ET SEULEMENT SI SON DTERMINANT EST NON NUL.
- LE DTERMINANT D'UN PRODUIT DE DEUX MATRICES EST LE PRODUIT DES DTERMINANTS.
- SI $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ SE PRSENTE TRIANGULAIRE PAR BLOCS, ALORS ON A:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_4|.$$

Dfinition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle cofacteur d'ordre (i, j) de A le scalaire $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j}|A_{i,j}|$, et on note $\text{Com}A$ la matrice des cofacteurs de A . $\diamond$

Propriétés: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t \text{Com}A \cdot A = |A|I_n$. Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t \text{Com}A$.

Voilà, avec ça, on en a plus qu'il n'en faut pour aborder -tadam!- la théorie spectrale.

3.2 Diagonalisation des endomorphismes

3.2.1 Préliminaires

Dans cette partie, un petit peu de vocabulaire pour fixer les idées.

Dfinitions: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- Soit F un sous-espace de E . On dira que F est stable par f si et seulement si:

$$\forall x \in F, fx \in F.$$

- Soit F un sous-espace de E stable par f . On peut alors définir un endomorphisme f_F de F , coïncidant avec f sur F . f_F sera appelé endomorphisme induit par f sur F .¹
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dira que λ est valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda I$ n'est pas injective. On notera alors $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda I)$. E_λ est le sous-espace propre de f relatif à λ , et ses éléments non nuls sont appelés vecteurs propres de f relatifs à λ . On note $\text{Spec}f$ l'ensemble des valeurs propres de f . $\diamond$

Soit F un sous-espace de E stable par f , de dimension p . On note $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Alors la matrice de f relativement à cette base est de la forme:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & a_{p,p+1} & \dots & a_{p,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p & B_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On commence à se dire que les sous-espaces stables sont particulièrement intéressants: si on arrivait à débusquer beaucoup, on aurait alors une matrice toute débroussaillée plus facile à étudier.

Proposition: Tout sous-espace propre de f est stable par f .

Ce résultat est absolument évident, et on peut vérifier que l'endomorphisme induit par f sur E_λ est l'homothétie de rapport λ . En revanche, un résultat un peu moins évident est le suivant:

Théorème: Les sous-espaces propres de f relatifs à des valeurs propres différentes sont en somme directe.

¹On fera bien attention de ne pas confondre endomorphisme induit par f sur F et restriction de f à F , noté $f|_F$. Pour se convaincre que ce n'est pas la même chose, il suffit de voir que le premier est une matrice carrée (il est valeurs dans F) et le second une matrice rectangulaire (il est valeurs dans E).

Dmonstration: On note $\text{Spec} f = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble des valeurs propres de f , deux deux distinctes. La démonstration se fait par récurrence. Soit la propriété:

$\forall 1 \leq p \leq k, P(p)$: La somme $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ est directe.

- Soit $(x_1, x_2) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2}$, tel que $x_1 + x_2 = 0$. On applique f à l'égalité précédente, et il vient que $f(x_1) + f(x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$. De $x_1 + x_2 = 0$ il vient, par exemple que $\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 = 0$, d'où en soustrayant membre à membre les deux égalités: $(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il s'en suit que $x_2 = 0$. puis que $x_1 = 0$. $P(2)$ est donc satisfaite.
- On suppose P satisfaite jusqu'au rang $1 \leq p < k$.

Soit $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_{p+1}}$ tel que l'on ait $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$. En

appliquant f à cette égalité, il vient $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0$. On multiplie la première égalité par λ_{p+1} , et on soustrait membre à membre ces deux égalités; il vient que:

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i = 0.$$

Or, en appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient que

$$\forall 1 \leq i \leq p, (\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq p, x_i = 0$$

puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes. On en déduit que x_{p+1} est nul lui aussi. On a donc obtenu:

$$\forall (x_1, \dots, x_{p+1}) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_{p+1}}, \left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq p+1, x_i = 0 \right),$$

ce qui dit bien que la somme $\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe. $P(p+1)$ est donc satisfaite.

La propriété P est donc héréditaire.

- Il s'en suit, par application de l'axiome de récurrence, que $P(k)$ est vraie, cqfd.

◇

Thorme: Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $\text{Im} u$ ainsi que tout sous-espace propre de u sont stables par v .

Dmonstration: Soit $y \in \text{Im} u$. $\exists x \in E, y = ux$. Alors on a:

$$vy = vux = uvx = u(vx) \in \text{Im} u.$$

$\text{Im} u$ est donc stable par v .

Soit λ valeur propre de u , soit $x \in E_\lambda$. Alors:

$$v(ux) = v(\lambda x) = \lambda vx = u(vx)$$

donc $vx \in E_\lambda$.

◇

3.2.2 Diagonalisation

On supposera dans tout ce qui suit que E est de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}f$. On a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow (f - \lambda I) \text{ non bijective.}$$

D'après ce qu'on a vu sur les dterminants, λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{Det}(f - \lambda I) = 0$. Or

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{Det}(f - \lambda I) = \text{Det}(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Des considrations combinatoires un peu compliquées nous montrent que ce dterminant est une fonction polynmiale en λ , de degr n et que l'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{Det}(f - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \text{Tr}f + \dots + \text{Det}f.$$

Cela nous amne introduire la dfinition suivante :

Dfinition: On appelle polynme caractéristique de f le polynme $\chi_f = \text{Det}(f - XI)$. $\diamond$

De ce qui prcde on dduit la

Propriet fondamentale: λ EST VALEUR PROPRE DE f SI ET SEULEMENT SI $\chi_f(\lambda) = 0$; $\text{Sp}f$ EST GAL L'ENSEMBLE DES RACINES DE χ_f , ET f ADMET AU PLUS n VALEURS PROPRES.

Dfinition: $\forall \lambda \in \text{Sp}f$, ON APPELLE ORDRE DE MULTIPLICIT DE λ SON ORDRE DE MULTIPLICIT DANS χ_f . $\diamond$

Thorme: λ tant valeur propre de f d'ordre α , on a $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Dmonstration: E_λ n'est pas rduit $\{0\}$ car $\lambda \in \text{Sp}f$, donc $\dim E_\lambda \geq 1$. Notons k la dimension de E_λ , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de E adapte E_λ . On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}f = \begin{pmatrix} \lambda I_k & A_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & A_{n-k,n-k} \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que l'on a $\chi_f = (\lambda - X)^k |A_{n-k,n-k} - XI_{n-k}|$ et $(\lambda - X)^k$ divise χ_f . On a donc $k \leq \alpha$, cqfd. $\diamond$

Dfinition: $f \in \mathcal{L}(E)$ sera dite diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f . $\diamond$

Cette dfinition peut paratre un peu abstraite prise comme ça mais on va vrifier que, en dimension finie, elle correspond bien ce qu'on attend :

Thorme: f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Dmonstration: Le fait que ce soit une condition ncessaire est quasiment vident compte tenu de tout ce qui prcde².

Rciproquement, si une telle base $\mathcal{B}$ existe, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}f = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

et le polynme caractéristique de f s'y calcule facilement :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^n (\lambda_k - X).$$

²Si f est diagonalisable, il suffit de se placer dans la runion des bases propres, et on obtient une matrice diagonale.

Soit β une des valeurs propres de f . Alors β est parmi $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; supposons β d'ordre k :

$$\exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \text{ tq } \lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_k} = \beta.$$

Notons alors $W_\beta = \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. On a $\dim W_\beta = k$.

Soit E_β le sous-espace propre associ β . Le thorme prcdent nous assure que $\dim E_\beta \leq k$. Or:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, f e_{i_j} = \lambda_{i_j} e_{i_j} = \beta e_{i_j},$$

donc $W_\beta \subset E_\beta$, et $\dim W_\beta = k \leq \dim E_\beta$. On a donc $\dim E_\beta = k$.

On a donc montr:

$$\forall \beta \in \text{Spec} f, \dim E_\beta \text{ est l'ordre de } \beta.$$

Les sous-espaces propres de f sont en somme directe, et la somme de leur dimension (qui est la somme des ordres de multiplicit des valeurs propres) vaut la dimension de E (qui est le degr de χ_f). Par consquent, E est somme des sous-espaces propres de f , et f est bien diagonalisable. $\diamond$

On remarquera qu'on a dmontr deux thormes pour le prix d'un:

Thorme: *f est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre est gale l'ordre de la valeur propre associe.*

On a notamment le corollaire suivant:

Corollaire: SI χ_f EST SCIND RACINES SIMPLES, ALORS f EST DIAGONALISABLE.

Preuve: En effet, si λ est valeur propre de f elle est d'ordre 1, et le sous-espace propre associ est de dimension au moins 1 car λ est valeur propre, au plus 1 car l'ordre de λ est 1. Il s'en suit que chaque sous-espace propre a pour dimension l'ordre de la valeur propre associe, ce qui montre que f est diagonalisable. $\diamond$

On dfinit maintenant la notion de matrice diagonalisable:

Dfinition: On dira que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, dont la matrice par rapport la base canonique est A , est diagonalisable. $\diamond$

Il est clair que A est diagonalisable si et seulement si A est semblable une matrice diagonale.

En faisant une petite pause ce stade de la thorie, on voit que diagonaliser un endomorphisme (ou une matrice) revient dterminer ses valeurs propres (calcul de χ_f et rsolution d'un polynme de degr n), et chercher les sous-espaces propres (quelques systmes d'quations linaires rsoudre).

3.2.3 Polynmes d'endomorphismes

E est toujours un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Nous allons maintenant faire agir les polynmes coefficients dans $\mathbb{K}$ sur les endomorphismes de E ; l'aboutissement de ce travail sera une simplification ventuelle de la recherche des valeurs propres d'un endomorphisme, ainsi qu'une condition ncessaire et suffisante simple de diagonalisabilit.

Dfinition: Soit $P = \sum_{k=1}^p p_k X^k$ un polynme coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Par dfinition:

$$P(f) = \sum_{k=1}^p p_k f^k.$$

$\diamond$

On définit ainsi un morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array} .$$

Définition: On dira que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de f (ou encore que f annule P) si et seulement si $P(f)$ est l'endomorphisme nul de f . $\diamond$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit λ une valeur propre de f , et x un vecteur propre associé. On a alors:

$$P(f)x = \sum_{k=1}^p p_k f^k x = \sum_{k=1}^p p_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

On voit donc que x est valeur propre de $P(f)$, de valeur propre associée $P(\lambda)$. Du coup, si P est un polynôme annulateur de f , on a $P(\lambda)x = 0$, et comme x est non nul, c'est que $P(\lambda)$ l'est. Par conséquent, on a le théorème:

Théorème: Soit P un polynôme annulateur de f . Alors le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de P .

Même de rien, ce résultat a été démontré en quelques lignes, et pourtant, il est extrêmement utile, dans la mesure où il nous permet déjà de localiser plus précisément le spectre de f dès qu'on a un polynôme annulateur. Cependant, ne pas faire l'erreur de dire que les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme qu'on a trouvé: en effet, si f annule P , alors tous les multiples de P sont annulés par f , ce qui nous dirait que tout scalaire est valeur propre (ce qui n'est évidemment pas le cas, vu qu'on a au plus n valeurs propres).

Théorème: Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur.

Démonstration: Soit f un endomorphisme de E . $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2 , donc toute famille de plus de n^2 éléments de $\mathcal{L}(E)$ est liée. Notamment, $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est une famille liée. Il existe donc une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs, qui nous fournit du coup un polynôme annulateur de degré n^2 . $\diamond$

À noter qu'on sait (théorème de Cayley-Hamilton, hors programme) qu'il existe un polynôme annulateur de f de degré n : son polynôme caractéristique.

Théorème: Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, soit f un endomorphisme de E . Si λ est valeur propre de f , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$ de même ordre que λ .

Démonstration: On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de f . On a donc:

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X).$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré p . Soit $\mu \in \mathbb{C}$; alors le polynôme $P - \mu$ est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$P - \mu = \prod_{k=1}^p (X - r_k).$$

On peut maintenant calculer $\chi_{P(f)}(\mu)$:

$$\chi_{P(f)}(\mu) = \text{Det}(P(f) - \mu I) = \text{Det}[(P - \mu)(f)].$$

Or, $(P - \mu)(f) = \prod_{k=1}^p (f - r_k I)$, donc:

$$\chi_{P(f)}(\mu) = \text{Det} \left(\prod_{k=1}^p (f - r_k I) \right) = \prod_{k=1}^p \text{Det}(f - r_k I).$$

Or, $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Det}(f - r_k I) = \chi_f(r_k) = \prod_{i=1}^n (r_k - \lambda_i)$. Il s'en suit que:

$$\chi_{P(f)}(\mu) = \prod_{k=1}^p \prod_{i=1}^n (r_k - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^p (r_k - \lambda_i).$$

Enfin, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \prod_{k=1}^p (r_k - \lambda_i) = (-1)^p (P(\lambda_i) - \mu)$, donc on a:

$$\chi_{P(f)}(\mu) = (-1)^{np} \prod_{i=1}^n (P(\lambda_i) - \mu).$$

On voit donc que si λ est valeur propre de f , d'ordre α (c'est dire que λ apparat α fois dans la factorisation de χ_f), alors $P(\lambda)$ apparat aussi α fois dans le factorisation de $\chi_{P(f)}$, ce qui dit bien que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$ de mme ordre que λ^3 . $\diamond$

Vient prsent LE thorme important de cette section, qui nous donne une caractrisation de la diagonalisabilit d'un endomorphisme:

Thorme: *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il annule un polynme scind racines simples.*

Dmonstration: Un sens de cette assertion est quasiment vident: si f est diagonalisable, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f deux deux distinctes. On a alors:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Soit $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$, soit x un vecteur de E .

$$\exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p}, x = x_1 + \dots + x_p.$$

On a alors $P(f)x = \sum_{k=1}^p P(f)x_k$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$.

$$P(f)x_i = \prod_{k=1}^p (f - \lambda_k I)x_i = \prod_{k \neq i} (f - \lambda_k I) \circ (f - \lambda_i)x_i = 0,$$

car $x_i \in E_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i)$. On a donc dmontr que $P(f)x_i = 0$ quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$; par consequent:

$$P(f)x = 0.$$

Enfin, x tant quelconque dans E , on voit que $P(f) = 0$. f annule donc un polynme scind racines simples.

Rciproquement, c'est plus compliqu. Posons la proprit:

$\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(p)$: Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel V , annulant un polynme $Q = a \prod_{k=1}^p (X - a_k)$ racines simples, alors $V = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - a_k I)$.

- Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V , annul par un polynme $Q = a(X - a_1)(X - a_2)$, avec $a_1 \neq a_2$. Soit $x \in V$. On a alors:

$$x = \frac{1}{a_2 - a_1} ((f - a_1 I)x - (f - a_2 I)x).$$

³Ceux qui suivent auront sans doute remarqu qu'on a travaill essentiellement sur le corps $\mathbb{C}$. Cependant, un polynme sur $\mathbb{R}$ peut tre vu comme un polynme sur $\mathbb{C}$, et si on le dtermine sur $\mathbb{C}$, on l'a dtermin a fortiori sur $\mathbb{R}$.

On note respectivement y_2 et y_1 les deux termes de cette somme. On a alors :

$$(f - a_2I)y_2 = \frac{1}{a_2 - a_1}(f - a_2I)(f - a_1I)x = K.Q(f)x = 0,$$

donc $y_2 \in \text{Ker}(f - a_2I)$. De mme, $y_1 \in \text{Ker}(f - a_1I)$. Il s'en suit que l'on a :

$$V = \text{Ker}(f - a_1I) \oplus \text{Ker}(f - a_2I),$$

et $\mathcal{P}(2)$ est vrifie.

- On suppose $\mathcal{P}$ satisfaite jusqu'au rang p . Soit V un espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(V)$, et soit

$$Q = a \prod_{k=1}^{p+1} (X - a_k)$$

un polynme annulateur de f racines simples. On note

$$S = a \prod_{k=1}^p (X - a_k).$$

Posons $U = \text{Ker}S(f)$ et $U_{p+1} = \text{Ker}(f - a_{p+1}I)$. On fait la division euclidienne de S par $X - a_{p+1}$:

$$S = (X - a_{p+1})T + r, \text{ avec } \text{degr} < 1.$$

Si $r = 0$, alors a_{p+1} serait racine de S , ce qui est exclu par hypothse. Par consquent, $r \in \mathbb{K}$ et r est non nul. On va encore sortir une formule magique; soit $x \in V$:

$$x = \frac{1}{r}S(f)x - \frac{1}{r}((f - a_{p+1}I) \circ T(f))x.$$

Posons $y_{p+1} = \frac{1}{r}S(f)x$ et $y = -\frac{1}{r}((f - a_{p+1}I) \circ T(f))x$. On a :

$$S(f)y = -\frac{1}{r}(S(f) \circ (f - a_{p+1}I) \circ T(f))x = (Q(f) \circ T(f))x = 0$$

car $Q(f)$ est l'endomorphisme nul. Donc $y \in U$.

De mme, $(f - a_{p+1}I)y_{p+1} = 0$, donc $y_{p+1} \in U_{p+1}$. On a donc montr que $V = U_{p+1} + U$.

$S(f)$ et f commutent, donc $U = \text{Ker}S(f)$ est stable par f . On note f_U l'endomorphisme induit par f sur U . On a alors :

$$\forall x \in U, S(f_U)x = S(f)x = 0$$

car $U = \text{Ker}S(f)$. Il s'en suit que f_U est un endomorphisme de U , annul par le polynme S qui est racines simples. En appliquant l'hypothse de rccurrence, il vient que

$$U = \sum_{k=1}^p \text{Ker}(f - a_kI),$$

et finalement

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p+1} \text{Ker}(f - a_kI)$$

ce qui nous montre que $\mathcal{P}(p+1)$ est vrifie.

- Il s'en suit par récurrence que $\mathcal{P}$ est vraie pour tout p .

Ce petit lemme tant démontré, on peut revenir à la démonstration de notre théorème: soit $f \in \mathcal{L}(E)$ annihilant un polynôme scindé à racines simples $a_1, \dots, a_p$. Notre lemme nous dit alors que:

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - a_k I).$$

Étant donné que les valeurs propres de f sont parmi les racines du polynôme annulateur, on en déduit notamment que E est somme directe des sous-espaces propres de f . $\diamond$

3.3 Exercices

1. Démontrer les formules de Cramer pour un système d'équations linéaires cramérien.
2. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent de E est diagonalisable si et seulement s'il est nul.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser J_n , et en déduire la valeur du déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

4. Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 1$. Soient u_0 et v_0 deux réels; étudier les suites u et v définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \beta)v_n \\ v_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \beta v_n \end{cases}$$

5. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\phi : g \mapsto \phi g = f \circ g$$

est diagonalisable.

Chapter 4

Espaces euclidiens

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces euclidiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et munis d'un produit scalaire. Nous reviendrons brièvement sur l'étude générale des espaces hilbertiens en rappelant ce que sont un produit scalaire, l'orthogonalité, ... puis nous rentrerons dans le vif du sujet. Le but tant d'arriver au théorème spectral.

4.1 Espaces hilbertiens: rappels

On se placera dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, car c'est sans doute le plus général. E est donc un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Définitions:

- On appelle forme semi-linéaire sur E une application de E dans $\mathbb{K}$ telle que:

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(\lambda x + y) = \bar{\lambda}f(x) + f(y).$$

- Soit f une application de E^2 dans $\mathbb{K}$. On dira qu'elle possède la symétrie hermitienne si et seulement si:

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

- On appelle forme sesquilinéaire sur E une application de E^2 dans $\mathbb{K}$, qui est linéaire par rapport à la première variable, semi-linéaire par rapport à la seconde.
- Étant donnée une forme sesquilinéaire symétrie hermitienne f sur E , on appelle forme hermitienne associée à f l'application q définie par

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x).$$

On dira que f est la forme polaire de q .

- Une forme sesquilinéaire f symétrie hermitienne sur E est dite positive si et seulement si

$$\forall x \in E, f(x, x) \geq 0.$$

- Une forme sesquilinéaire f symétrie hermitienne sur E est dite définie si et seulement si:

$$\forall x \in E, (f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

- Une forme sesquiliaire f symtrie hermitienne sur E est dit non dgnre si et seulement si

$$\forall x \in E, (\forall y \in E, f(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

- On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilineaire symtrie hermitienne dfinie positive.
- On appelle espace prhilbertien la donne d'un couple $(E, (\cdot|\cdot))$, o $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

◇

On suppose E muni d'une structure d'espace prhilbertien.

Thormes:

- On a l'ingalit de Cauchy-Schwartz:

$$\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y).$$

- On a l'ingalit de Minkowski:

$$\forall (x, y) \in E^2, \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)} \geq \sqrt{(x+y|x+y)}.$$

- L'application dfinie par

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

dfnit une norme sur E .

Dfnitions:

- On dira que deux vecteurs de E sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- On dira qu'une famille de vecteurs est orthogonale si et seulement si les vecteurs qui la composent sont deux deux orthogonaux.
- Etant donne une partie A de E , on appelle orthogonal de A l'ensemble

$$A^\circ = \{x \in E, \forall y \in A, (x|y) = 0\}.$$

◇

Thormes:

- Toute famille orthogonale ne contenant pas 0 est libre.
- L'orthogonal d'une partie est un espace vectoriel.
- Si F est un sous-espace de E , F et F° sont en somme directe.

Terminons par dfinir les espaces euclidiens et hermitiens:

Dfnitions:

- On appelle espace euclidien tout espace prhilbertien rel de dimension finie.
- On appelle espace hermitien tout espace prhilbertien complexe de dimension finie.

◇

4.2 Espaces euclidiens

Dans tout ce qui suit, $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien de dimension n .

4.2.1 Gnralits

Commençons avec le procd d'orthonormalisation de Schmidt.

Thorme: *Quelle que soit la famille libre finie $(x_1, \dots, x_p)$ d'un espace euclidien, il existe une famille orthonorme $(e_1, \dots, e_p)$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Dmonstration: Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E . On pose:

$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \mathcal{P}(k) : \exists (e_1, \dots, e_k)$ famille orthonormale telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k).$$

- On a $x_1 \neq 0$, donc on pose $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Alors on a e_1 qui est un vecteur de norme 1 et qui engendre le mme espace que x_1 . $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
- soit $k < p$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. On a donc construit une famille $(e_1, \dots, e_k)$ orthonormale telle que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $(e_1, \dots, e_j)$ engendre le mme sous-espace que $(x_1, \dots, x_j)$. On pose:

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^k (x_{k+1}|e_i)e_i.$$

Si y_{k+1} tait nul, alors x_{k+1} serait dans le sous-espace engendr par $(e_1, \dots, e_k)$ qui est le mme que celui engendr par $(x_1, \dots, x_k)$, ce qui contredirait la libert de $(x_1, \dots, x_{k+1})$. Par consquent y_{k+1} est non nul. On pose alors $e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$, qui est un vecteur de norme 1. En outre:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, (e_{k+1}|e_j) = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} \left((x_{k+1}|e_j) - \sum_{i=1}^k (x_{k+1}|e_i)(e_i|e_j) \right).$$

Or, dans la somme ci-dessus, un seul terme est non nul: celui correspondant $k = j$; d'o:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, (e_{k+1}|e_j) = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} ((x_{k+1}|e_j) - (x_{k+1}|e_j)(e_j|e_j)) = 0,$$

donc $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est orthonormale (et libre). En outre, cette famille engendre le mme sous-espace que $(x_1, \dots, x_{k+1})$, et on a ainsi la propri $\mathcal{P}$ au rang $k+1$.

- Du coup, le thorme est dmontr par rccurrence.

◇

Consquence: TOUT ESPACE EUCLIDIEN ADMET UNE BASE ORTHONORME.

Thorme: *Si F est un sous-espace de E , F et F° sont supplmentaires.¹*

¹Attention: ce rsultat n'est pas toujours vrai dans un espace prhilbertien quelconque; on ne l'a que si F est ferm pour la norme hermitienne.

Dmonstration: On sait dj que F et F° sont en somme directe. Reste montrer que leur union engendre E . F admet une base orthonorme $(e_1, \dots, e_p)$. Si $x \in E$, on pose

$$z = x - \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k.$$

Alors on vrifie aisement que z est dans F° et on a bien dcompos x en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de F° . D'o $E = F \oplus F^\circ$. $\diamond$

Dfinition: Si $x \in E$, et $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormale de vecteurs de E , on appelle projection orthogonale de x sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ le vecteur:

$$p_F x = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k.$$

$\diamond$

Le projet orthogonal de x sur F est le point de F le plus proche de x au sens de la distance euclidienne.

Thorme (Ingalit de Bessel): Soit $x \in E$ et F un sous-espace de E . On a:

$$\|x\| \geq \|p_F x\|.$$

Dmonstration: Posons $z = x - p_F x$. z et $p_F x$ sont orthogonaux, donc:

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|p_F x\|^2, \text{ d'o}$$

$$\|p_F x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

$\diamond$

4.2.2 Automorphismes orthogonaux

Thorme et dfinition: Soit f une application de E dans E respectant le produit scalaire, c'est dire

$$\forall (x, y) \in E^2, (fx|fy) = (x|y).$$

Alors f est un automorphisme de E , appel automorphisme orthogonal.

Dmonstration: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonorme de E . On a donc:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (fe_i|fe_j) = (e_i|e_j),$$

ce qui nous dit que la famille $(fe_1, \dots, fe_n)$ est orthonormale. f transforme donc une base de E en une autre base de E . Il ne reste plus qu' montrer que f est linnaire et on a gagn.

Soit $x \in E$; on le dcompose dans notre base $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k,$$

et compte tenu du fait que le prduit scalaire est prserv par f :

$$fx = \sum_{k=1}^n (fx|fe_k) e_k.$$

On dcompose maintenant fx dans la base $(fe_1, \dots, fe_k)$:

$$fx = \sum_{k=1}^n (fx|fe_k) fe_k.$$

On peut alors s'assurer avec ces relations de la linéarité de f (il suffit de l'écrire). $\diamond$

Voici maintenant quelques définitions équivalentes des automorphismes orthogonaux, qu'on pourra éventuellement faire en exercices pour s'habituer à manipuler le produit scalaire:

Thèmes: Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. f est un automorphisme orthogonal.
2. f est linéaire et respecte la norme.
3. $f(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
4. f est linéaire et transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

Thème: Les automorphismes orthogonaux forment un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$, noté $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration: Soient f et g deux automorphismes orthogonaux; soient x et y deux vecteurs de E .

$$((f \circ g)x | (f \circ g)y) = (f(gx) | f(gy)) = (gx | gy) = (x | y),$$

donc $f \circ g$ est un automorphisme orthogonal. $\diamond$

Voyons maintenant comment caractériser la matrice d'un automorphisme orthogonal: soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \circ f$ est un automorphisme orthogonal. On a alors:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, fe_i = \sum_{k=1}^n m_{k,i} e_k.$$

Soient i et j dans $\{1, \dots, n\}$. On a:

$$(fe_i | fe_j) = \left(\sum_{k=1}^n m_{k,i} e_k \mid \sum_{l=1}^n m_{l,j} e_l \right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} (e_k | e_l) m_{k,i} m_{l,j}.$$

Compte tenu de l'orthogonalité de la famille $\mathcal{B}$, on a:

$$(fe_i | fe_j) = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j}$$

et on reconnaît le terme d'ordre (i, j) de la matrice ${}^t M M$. Comme $(e_i | e_j)$ vaut 1 si et seulement si $i = j$, on en déduit que ${}^t M M$ a des 0 partout, sauf sur la diagonale où elle a des 1. Par conséquent, l'inverse de M est sa transposée.²

4.2.3 Isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual- Adjoint d'un endomorphisme

Thème: On note E^* le dual de E .

$$\forall \phi \in E^*, \exists ! v \in E, \forall x \in E, \phi x = (v | x).$$

Démonstration: On considère l'application θ qui à un vecteur x de E associe la forme linéaire suivante:

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \theta_x y = (x | y) \end{array} .$$

²Une telle matrice est appelée matrice orthogonale.

Le thorme consiste donc montrer que θ est une bijection entre E et son dual. Or, on sait que ces deux espaces ont mme dimension, donc il suffit de montrer l'injectivit pour avoir la bijectivit.

Soit $x \in \text{Ker}\theta$. θ_x est donc la forme linnaire nulle:

$$\forall y \in E, \theta_x y = (x|y) = 0.$$

Notamment, pour $y = x$, on a $\|x\| = 0$, qui nous implique que x est nul. Par consequent, le noyau de θ est rduit $\{0\}$ et on a donc l'injectivit.

◇

Thorme et dfinition: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme de E , appel adjoint de u et not u^* , tel que:

$$\forall (x, y) \in E^2, (ux|y) = (x|u^*y).$$

Dmonstration: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$. L'application suivante

$$\begin{aligned} \phi: E &\rightarrow \mathcal{R} \\ y &\mapsto \phi y = (x|uy) \end{aligned}$$

est une forme linnaire sur E . D'aprs le thorme prcdent, il existe un unique vecteur w tel que

$$\forall y \in E, (x|uy) = (w|y).$$

On considre l'application v qui x associe w . Cette application vrifie donc:

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|uy) = (v(x)|y).$$

Montrons que v est linnaire. Soient x et z dans E , soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors:

$$\forall y \in E, (\lambda x + z|uy) = (v(\lambda x + z)|y).$$

En dveloppant le membre de gauche, il vient:

$$\forall y \in E, (\lambda x + z|uy) = \lambda(x|uy) + (z|uy) = (\lambda v(x)|y) + (v(z)|y) = (\lambda v(x) + v(z)|y).$$

Il s'en suit que:

$$\forall y \in E, (v(\lambda x + z)|y) = (\lambda v(x) + v(z)|y), \text{ donc}$$

$$\forall y \in E, (v(\lambda x + z) - \lambda v(x) - v(z)|y) = 0.$$

Le produit scalaire tant non dgnr, on en dduit que:

$$v(\lambda x + z) = \lambda v(x) + v(z),$$

donc que v est linnaire. v dfinit donc un endomorphisme de E , qu'on note u^* . ◇

On peut alors vrifier les rsultats suivants:

Thormes:

- L'application qui un endomorphisme de E associe son adjoint est linnaire, bijective et involutive.
- Si u et v sont deux endomorphismes de E , $(uv)^* = v^*u^*$.
- Si p est un projecteur orthogonal, alors $p = p^*$. Rciroquement, si p un projecteur tel que $p^* = p$, alors c'est un projecteur orthogonal.

Donnons maintenant la représentation matricielle de l'adjoint: soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonorme de E , et on note M (resp. M^*) la matrice de u (resp. u^*) relativement à cette base. On se donne deux entiers i et j compris entre 1 et n .

$$(e_i | u e_j) = \left(e_i \left| \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k \right. \right) = m_{i,j},$$

$$(u^* e_i | e_j) = \left(\sum_{k=1}^n m_{k,i}^* e_k \left| e_j \right. \right) = m_{j,i}^*.$$

On a donc $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{j,i}^* = m_{i,j}$. D'où le thorme:

Thorme: *La matrice de u^* relativement à une base orthonorme est la transposée de celle de u relativement à la même base.*

Thorme: *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace de E stable par u . Alors F° est stable par u^* . Du coup, par involutivité du passage à l'adjoint, un sous-espace de E est stable par u si et seulement si son orthogonal est stable par u^* .*

Définition: *Un endomorphisme de E est dit autoadjoint si et seulement s'il est égal à son adjoint.* $\diamond$

Et nous arrivons enfin au thorme spectral, impressionnant si on compare l'importance du résultat obtenu aux hypothèses.

Thorme: *Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonorme.*

Démonstration: Soit E euclidien de dimension n , rapportons une base orthonorme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$. Nous allons commencer par montrer que toutes les valeurs propres de u sont réelles; pour cela, on doit faire une petite incursion dans $\mathbb{C}$. On note donc g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice par rapport à la base canonique est M . Soit λ une racine de χ_g . λ est valeur propre de g , donc il existe x non nul dans $\mathbb{C}^n$ tel que $gx = \lambda x$. Matriciellement, ça s'écrit:

$$MX = \lambda X.$$

En passant au conjugué, on trouve:

$$\overline{MX} = \overline{M} \overline{X} = \overline{\lambda X}.$$

Or, M est à coefficients réels, donc $\overline{M} = M$, et on a:

$$M \overline{X} = \overline{\lambda X}.$$

$\overline{\lambda}$ est donc aussi valeur propre de g . On a alors:

$${}^t \overline{X} M X = {}^t \overline{X} \lambda X = \lambda {}^t \overline{X} X = \lambda \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

D'autre part:

$${}^t \overline{X} M X = ({}^t \overline{X} M) X = {}^t (M \overline{X}) X = \overline{\lambda} {}^t \overline{X} X = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

X tant non nul, $\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \neq 0$, donc on a $\overline{\lambda} = \lambda$. λ est donc réelle.

Toutes les racines de χ_g sont donc réelles. Comme $\chi_g = \chi_u$, on en déduit que χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit λ une valeur propre de u , et E_λ le sous-espace propre associ. On a :

$$E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\circ.$$

Or, E_λ est stable par u donc son orthogonal est stable par $u^* = u$. Posons $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormale de E_λ , qu'on complte avec $(u_{p+1}, \dots, u_n)$ base orthonormale de E_λ° . Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & A_{n-p} \end{pmatrix}.$$

La sous-matrice A est celle de l'endomorphisme de E_λ° induit par u relativement la base $(u_{p+1}, \dots, u_n)$. Notant v cet endomorphisme, λ n'est pas valeur propre de v . Le calcul du polynme caractritique de u nous donne $\chi_u = (\lambda - X)^p \text{Det}(A - XI_{n-p})$ et λ n'tant pas valeur propre de A , on en dduit que son ordre de multiplicit est p , c'est dire la dimension du sous-espace propre E_λ . u est donc diagonalisable, car la dimension de tout sous-espace propre est gale l'ordre de multiplicit de la valeur propre.

En outre, les sous-espaces propres sont deux deux orthogonaux d'apr tout ce qui prcde, donc on peut diagonaliser u dans une base orthonorme.

◇

Corollaire: TOUTE MATRICE SYMTRIQUE RELLE EST DIAGONALISABLE L'AIDE D'UNE MATRICE DE PASSAGE ORTHOGONALE.

4.3 Exercices

1. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace euclidien. On appelle dterminant de Gram de ce systme, not $G(x_1, \dots, x_p)$ le dterminant de la matrice de terme gnral $((x_i | x_j))_{i,j}^{p,p}$. Montrer que ce dterminant est nul si et seulement si la famille est lie.
2. Soit E est un espace hermitien. On y dfinit l'adjoint comme dans un espace euclidien. Montrer que u est un endomorphisme de E tel que $uu^* = u^*u$ quivaut dire que u et u^* sont diagonalisables dans une mme base orthonorme. En dduire le thorme spectral.
3. Soit M une matrice symtrique de carr nul. Montrer qu'elle est nulle.
4. Soit u un endomorphisme de E muni d'une structure euclidienne. Montrer que uu^* et u^*u ont les mmes valeurs propres.
5. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne classique et on prend sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme d'application linraire associe la norme euclidienne. Expliciter la norme d'une matrice.
6. Dterminer $\text{Min} \left\{ \int_0^1 (\sin x - a - bx - cx^2)^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Part II
Analyse

Cette partie est consacrée aux grosses parties du cours d'analyse de prpa. Par grosses parties, j'entends celles qui tombent chaque année aux concours: l'étude des suites, des séries, des séries entières et l'intégration.

Comme on ne peut pas faire d'analyse sans des notions de topologie, j'ai regroupé tous les résultats utiles de topologie des espaces vectoriels normés dans un premier chapitre, sous forme d'exercices progressifs permettant déjà de s'assurer un niveau conséquent.

Tout ce qui suit constitue les grands classiques du programme de prpa, et doit être absolument maîtrisé. La plupart des résultats du cours sont des résultats qu'on pourrait qualifier d'analyse bourrine; il est bon de savoir que la plupart du temps, et dans les concours normaux (c'est-à-dire X-ENS exclus), on vous laisse rarement faire un raisonnement fin tout seul. Conclusion, si on vous demande d'établir directement une convergence normale de série sans que ce qui précède semble avoir un rapport, c'est que vous devez pouvoir le faire sans trop de mal.

Chapter 5

Notions de topologie des evn

Ce chapitre consiste en une série d'exercices censés reproduire un cours de topologie des espaces vectoriels normés, avec une démarche pas à pas: on démontre petit à petit les principaux théorèmes, tout en introduisant au passage les notions nécessaires leur résolution. C'est mon avis une meilleure façon d'aborder la chose, plutôt que de laisser le professeur débiter des choses, certes vraies, mais qui paraissent abstraites et risquent de vous passer au dessus de la tête.

1. Rappeler ce qu'est une norme $\| \cdot \|$ sur un espace vectoriel E , ce qu'est une boule ouverte, et enfin ce qu'est un ouvert; montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
2. Rappeler ce qu'est un fermé; montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé, et qu'une réunion finie de fermés est un fermé.
3. Montrer qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est réunion de boules ouvertes.
4. Rappeler ce qu'est un point adhérent d'une partie de E .
5. Montrer que a est adhérent à $A \subset E$, si et seulement si la distance de a à A est nulle. Définir l'adhérence de A .
6. Montrer que a est adhérent à $A \subset E$ (A non vide) si et seulement si a est limite d'une suite de valeurs dans A .
7. Montrer qu'une partie de E est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents.
8. Montrer qu'une partie F non vide de E est fermée si et seulement si toute suite convergente de valeurs dans F a sa limite dans F .
9. Rappeler ce qu'est un compact, et montrer qu'un compact est fermé borné; montrer que si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont exactement les fermés bornés de E .

À présent, quelques exercices plus difficiles:

1. Montrer que dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
2. Soient E et F deux evn, et soit f une application continue de E dans F . Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

3. Soit f une application contractante de E dans lui mme. Montrer que f admet un unique point fixe.
4. Soit X un compact de E et soit f une application de X dans lui mme, telle que

$$\forall(x, y) \in X^2, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
 Montrer que f admet un unique point fixe.
5. Soit E un Banach. Montrer qu'une intersection de fermes d'intérieur vide est d'intérieur vide.
6. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
7. Montrer qu'une fonction continue sur un compact l'est uniformment.
8. Une partie X d'un evn E est dite prcompacte si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ϵ . Montrer que si E est complet, alors dire que X est compact quivaut dire qu'il est prcompact.
9. Soit E un evn, st soit $X \subset E$ un compact. Montrer le lemme de Lebesgue: si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement par ouverts de X , il existe $r > 0$, tel que pour tout x de E , il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega_i$.
10. Montrer que si X est un compact de E , il possde la propriét de Borel-Lebesgue: de tout recouvrement par ouverts de X on peut extraire un sous recouvrement fini.
11. Montrer qu'un evn E est de dimension finie si et seulement si la boule unit est compacte.

Chapter 6

Analyse squentielle

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude des suites valeurs dans un espace vectoriel norm, et des sries numriques. En lisant ce qui suit, on pourra se dire qu'une srie, ce n'est rien d'autre qu'un cas particulier de suite; toutefois, on se rend compte avec l'exprience qu'une srie est plus facile tudier qu'une suite, tout simplement parce qu'on a accs un plus large panel de thormes.

6.1 Suites valeurs dans un evn

On se donne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel norm $(E, \|\cdot\|)$.

Dfnitions:

- On appelle suite valeurs dans E une application de $\mathbb{N}$ dans E . On notera indiffremment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou u s'il n'y a pas d'ambigut, une telle application.
- L'ensemble des suites valeurs dans E sera not $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$. Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Une suite u sera dite borne si et seulement si l'ensemble

$$\{\|u_n\|, n \in \mathbb{N}\}$$

est born. On notera $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ l'espace vectoriel des suites valeurs dans E bornes.

- Si u est une suite valeurs dans E , on appelle suite extraite de u (ou sous-suite) toute suite du type $u_{\phi(n)}$, o ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui mme.
- On dira que la suite u converge si et seulement si

$$\exists l \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \epsilon).$$

Le vecteur l est appel limite de la suite u .

- On dira que la suite u est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|u_{n+p} - u_n\| \leq \epsilon).$$

◇

On donne ici sans dmonstration les thormes classiques sur les suites (nous les ferons en exercice si besoin est):

Thormes:

- Si une suite converge, alors il y a unicité de la limite.
- Si une suite u converge, alors toute sous-suite converge vers la limite de u .
- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Si une sous-suite d'une suite de Cauchy u converge vers U , alors toutes les sous-suites de u , et notamment u , convergent vers U .
- Si u et v sont deux suites convergentes de limite respective U et V , alors pour tous scalaires λ et μ , $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda U + \mu V$.
- Le produit d'une suite vectorielle bornée par une suite scalaire tendant vers 0 converge vers 0.
- Le produit d'une suite vectorielle convergente vers 0 par une suite scalaire bornée converge vers 0.
- Si u est une suite vectorielle convergente vers U , et λ une suite scalaire convergente vers Λ , la suite λu converge vers ΛU .

On peut voir d'jà que la notion de suite de Cauchy se rapproche beaucoup de celle de suite convergente: en effet, dire qu'une suite est de Cauchy revient à dire que ses termes finissent par être infiniment proches. Cependant, il existe des topologies d'espace vectoriel normé assez pathologiques, pour lesquelles cette condition ne suffit pas pour assurer la convergence.

Définition: Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est appelé espace de Banach, ou espace vectoriel normé complet.

◇

Savoir qu'un espace est de Banach (ce qui est le cas dans la plupart des espaces qu'on considérera) peut être particulièrement utile: en effet, il est parfois plus facile d'établir le critère de Cauchy que la convergence, car pour celui-ci, la connaissance de la limite n'est pas nécessaire. Nous allons maintenant nous attacher à montrer que tout espace vectoriel de dimension finie (quelle que soit la norme considérée, car elles sont toutes équivalentes) est un espace de Banach. Commençons avec $\mathbb{R}$:

Lemme (Bolzano-Weierstrass): De toute suite bornée sur $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration: Soit u une suite réelle bornée. Alors il existe deux réels a_0 et b_0 , tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n < b_0.$$

Parmi les deux intervalles $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, l'un au moins contient une infinité de termes de la suite. On note $[a_1, b_1]$ cet intervalle, et on a:

$$\begin{cases} a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 = \frac{b_0}{2} - \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

On suppose alors construits $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$, tels que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, a_i \leq a_{i+1}, b_i \geq b_{i+1},$$

$$b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} \text{ et tels que}$$

$[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u . Parmi les intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ et $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$, l'un au moins contient une infinité de termes de

la suite. On note $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ cet intervalle, et on alors russi continuer la construction nonce plus haut.

A partir de 1, on se donne $u_{\phi(0)} = u_0$ dans $[a_0, b_0]$, $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$ avec $\phi(1) > \phi(0)$ (ce qui est toujours possible car $[a_1, b_1]$ contient une infinit de termes de la suite), et on continue ainsi la construction d'une sous-suite u_ϕ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n].$$

Or, les suites a et b sont adjacentes, donc convergent toutes deux vers l . Il s'en suit que u_ϕ converge galement vers l , cqfd. $\diamond$

Corollaire: DE TOUTE SUITE COMPLEXE BORNE ON PEUT EXTRAIRE UNE SOUS-SUITE CONVERGENTE.

Dmonstration: Soit $z = x + iy$ une suite complexe borne. Alors x est relle borne: il existe une sous-suite x_ϕ qui converge vers X . La suite y_ϕ quant elle est borne en tant que sous-suite d'une suite borne, et on peut en extraire une sous-suite convergente $y_{\phi \circ \psi}$, de limite Y . Alors la suite $x_{\phi \circ \psi}$, en tant que sous-suite d'une suite convergente, converge vers la limite de x_ϕ , savoir X .

Il s'en suit que la suite $z_{\phi \circ \psi}$ converge vers $X + iY$, ce qui achve la dmonstration. $\diamond$

Corollaire: TOUTE SUITE BORNE, VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL NORM DE DIMENSION FINIE, ADMET UNE SOUS-SUITE CONVERGENTE.

Dmonstration: Soit u une suite borne valeurs dans un espace vectoriel norm de dimension finie.

Ds qu'on s'est donn une base $\mathcal{B}$, il suffit d'extraire une sous-suite convergente de la premire suite coordonne, puis d'extraire une sous-suite convergente de la sous-suite de la seconde suite coordonne, etc... Au final, on aura fait un nombre fini d'extractions de sous-suites, et on aura finalement extrait une sous-suite u qui converge coordonne par coordonne, donc qui converge tout court. $\diamond$

D'o le thorme de compltude des espaces vectoriels norms de dimension finie:

Thorme: *Tout evn de dimension finie est complet.*

Dmonstration: Soit u une suite de Cauchy. Alors elle est borne, et on peut en extraire une sous-suite convergente. Or, on sait que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle converge. Par consquent, u converge. Toute suite de Cauchy valeurs dans un evn de dimension finie converge, ce qui montre bien qu'il s'agit d'un Banach. $\diamond$

Trs bien. Terminons en maintenant avec les gnralits en introduisant les notions de comparaison de suites.

Dfinition: Soient u et v deux suites scalaires. On dira que u est quivalente v (on note $u \sim v$) si et seulement si:

$$\exists w \text{ suite tendant vers } 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tq } \forall n \geq N, u_n = v_n(1 + w_n).$$

Si la suite v ne s'annule pas partir d'un certain rang, $u \sim v$ quivaut dire que $\frac{u}{v}$ peut tre dfinie partir d'un certain rang, et converge vers 1. $\diamond$

On pourra vrifier titre d'exercice que l'on dfinit ainsi une relation d'quivalence, ainsi que les rsultats suivants:

Thormes:

- Si u est une suite scalaire convergeant vers $l \neq 0$, alors $u \sim l$.
- Si $u \sim v$ et u converge vers l , alors v converge aussi vers l .

- Si $u \sim v$ et $z \sim t$, alors $uz \sim vt$.
- Si $u \sim v$ et $z \sim t$, et si z et t ne s'annulent pas, alors $\frac{u}{z} \sim \frac{v}{t}$.

Dfinitions: Soit u une suite vectorielle, et soit α une suite réelle.

- On dira que u est négligeable devant α , et on note $u = o(\alpha)$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq \epsilon |\alpha_n|.$$

- On dira que u est dominée par α , et on note $u = O(\alpha)$ si et seulement si:

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n\| \leq M |\alpha_n|.$$

◇

6.2 Séries réelles ou complexes

6.2.1 Généralités

Dfinitions:

- Soit u une suite de valeurs dans $\mathbb{K}$. On dira que la série $((u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (aussi notée (u) lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité) converge si et seulement si la suite des sommes partielles

$$(U_n = \sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge.

- Si la série (u) converge, on appelle somme de (u) la limite de la suite des sommes partielles.
- La série (u) sera dite absolument convergente si et seulement si la série $(|u|)$ converge.
- Soit (u) une série. On appelle série reste d'ordre N de la série (u) la série $((u_n))_{n > N}$. ◇

On a alors quelques théorèmes généraux dont la démonstration peut être vue en exercice si besoin est:

Théorèmes:

- Si (u) et (v) sont deux séries convergentes de somme respective U et V , alors pour tous scalaires λ et μ , la série $(\lambda u + \mu v)$ est convergente de somme $\lambda U + \mu V$. L'ensemble des séries constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Dire que (u) converge équivaut à dire que la série reste converge vers 0.
- Si la série (u) converge, alors la suite u converge vers 0. Par contraposée, si u ne tend pas vers 0, alors la série (u) ne peut converger.

Théorème: Une série absolument convergente converge.

Démonstration: Soit (u) une série convergente absolument. Alors la suite des sommes partielles associée à $|u|$ est de Cauchy. On se donne $\epsilon > 0$; il existe alors $N \in \mathbb{N}$, tel que:

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \leq \epsilon.$$

Or, le module d'une somme est major par la somme des modules, donc :

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \epsilon,$$

ce qui nous dit bien que la srie (u) est de Cauchy: elle est donc convergente, car $\mathbb{K}$ est complet. $\diamond$

On aura pu remarquer qu'une srie n'est rien d'autre qu'une suite; rciproquement, une suite est une srie dguise: en effet, dire que la suite u converge quivaut dire que la srie $((u_{n+1} - u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

6.2.2 Sries relles positives

Soit u une suite relle positive. On appelle s la suite des sommes partielles associe la srie (u) . Alors s est une suite relle croissante. Or, on sait qu'une suite relle croissante converge si et seulement si elle est majeure, et que si une suite relle croissante converge, elle est majeure par sa limite. On en dduit:

Thorme: Soient (u) et (v) deux sries relles positives, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

Si (v) converge, alors (u) converge, et $U \leq V$; si (u) diverge, alors (v) diverge.

Thorme: Soit u une suite relle positive partir d'un certain rang; soit (v) une srie relle vrifiant $u \sim v$. Alors les deux sries sont de mme nature.

Dmonstration: $u \sim v$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \exists (\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, tels que:

$$\forall n \geq N, u_n = v_n(1 + \epsilon_n).$$

D'autre part, il existe un rang N_0 partir duquel tous les termes de la suite ϵ sont dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc

$$\forall n \geq N_0, \frac{1}{2} \leq \epsilon_n + 1 \leq \frac{3}{2}.$$

Du coup, u et v sont du mme signe partir de N_0 . Enfin, u est positive partir d'un certain rang N_1 . Posant $N_2 = \text{Max}\{N, N_0, N_1\}$, on a:

$$\forall n \geq N_2, 0 < \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Il ne reste qu'appliquer le thorme prcdent pour conclure. $\diamond$

Thorme: Soit (u) une srie relle positive partir d'un certain rang, soit (v) une srie relle avec $u = O(v)$. Si (v) converge, alors (u) converge; si (u) diverge, alors (v) diverge.

Critre de D'Alembert: Soit (u) une srie strictement positive, telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a . Si $a < 1$, la srie converge, si $a > 1$ la srie diverge, et si $a = 1$, on ne peut rien dire.

On donnera une dmonstration de ce critre en exercice, car il s'agit d'un rsultat trs classique. En outre, nous verrons aussi une version plus fine de ce thorme permettant parfois de s'en sortir dans le cas o $a = 1$ (critre de Duhamel).

6.2.3 Sries de rfrence

L'objet de ce paragraphe est de prsenter les principales sries dont on se sert (et qui sont au programme... D'autres seront vues en exercices) comme sries de comparaison: on sait donner prcisment un critre de convergence, et on les compare la srie qu'on est en train d'tudier, en esprant conclure avec les thormes prcdents.

Sries gomtriques. Ce sont les sries du type $((a^n))_{n \in \mathbb{N}}$. Elles convergent absolument si et seulement si $0 \leq |a| < 1$. A noter qu'on sait valuer prcisment leur limite ainsi que le reste:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Sries de Riemann. Ce sont les sries du type $((\frac{1}{n^\alpha}))_{n \in \mathbb{N}}$. On peut dmontrer (voir exercices) qu'une telle srie converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6.2.4 Critre des sries alternes

Nous allons obtenir l'un thorme trs utile pour tudier les sries qui ne sont pas absolument convergentes, mais qui seraient susceptibles de converger compte tenu d'une alternance de signe du terme gnral.

Dfinition: Soit (u) une srie relle. On dit que c'est une srie alterne si et seulement si la suite $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ garde un signe constant. $\diamond$

Thorme: Une srie alterne (u) dont le module du terme gnral tend vers 0 en dcroissant converge. Sous ces conditions, le reste d'ordre n est du signe de u_{n+1} , et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Dmonstration: On suppose, quitte à changer u en $-u$, que la suite $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est toujours positive. On a alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = (-1)^n u_n$$

et on note v la suite $|u|$.

Posons alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Il s'agit pour nous de montrer que la suite S converge. Soit n un entier. On a:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1}.$$

La suite v étant dcroissante, on en dduit que $S_{2n+2} - S_{2n} \leq 0$.

De mme, on a:

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = v_{2n+2} + v_{2n+3} \geq 0.$$

Enfin, notons que:

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -v_{2n+1} \leq 0.$$

On vient donc de voir que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement dcroissante et croissante, et que la première majore la seconde. En outre, la dernière ligne de calcul montre que la différence de ces deux suites tend vers 0, puisque v tend vers 0 par hypothèse. Ces deux suites sont donc adjacentes, et elles admettent une limite commune l .

Soit ϵ un réel strictement positif. Alors:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |S_{2n} - l| \leq \epsilon) \text{ et}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |S_{2n+1} - l| \leq \epsilon).$$

Posons alors $N = \text{Max}\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, et donnons nous n supérieur à N . Si n est pair, on a $n = 2p$ avec $p \geq N_1$ donc la différence $|S_n - l|$ est plus petite que ϵ . De mme, si n est impair, on a $|S_n - l| \leq \epsilon$. On a donc montré:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |S_n - l| \leq \epsilon),$$

ce qui nous dit exactement que la suite S converge.

Compte tenu de ce qui prcde, on a aussi l'ingalit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}.$$

Etant donn $n \in \mathbb{N}$, on a donc:

$$R_{2n} = l - S_{2n+1} \leq 0,$$

donc R_{2n} est du signe de u_{2n+1} . De plus,

$$|R_{2n}| = S_{2n} - l \leq S_{2n} - S_{2n+1} = |u_{2n+1}|.$$

De mme, R_{2n+1} est du signe de u_{2n+2} , et $|R_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|$, ce qui achve la dmonstration. $\diamond$

6.2.5 Produit de Cauchy de deux sries-Exponentielle

Aprs avoir tudi les sries termes rels, nous revenons aux sries termes rels ou complexes, et nous dfinissons le produit de Cauchy de deux sries.

Dfinition: Soient (u) et (v) deux sries relles ou complexes. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

La srie (w) est appele produit de Cauchy des deux sries (u) et (v) . $\diamond$

Thorme: Soient (u) et (v) deux sries relles convergentes, de somme respective U et V . Alors le produit de Cauchy est une srie relle convergente, de somme UV .

Dmonstration: Ici, on ruse un peu: on pose pour tout entier n

$$K_n = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \text{ et } \Delta_n = \{(k, p-k), 0 \leq k \leq p \leq n\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$W_n = \sum_{p=0}^n w_p = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p u_k v_{p-k} = \sum_{(i,j) \in \Delta_n} u_i v_j.$$

Or, $\Delta_n \subset K_n$ et les termes des sries (u) et (v) sont positifs; il s'en suit que:

$$W_n \leq \sum_{(i,j) \in K_n} u_i v_j = \left(\sum_{i=0}^n u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n v_j \right) \leq UV.$$

Il s'en suit que la suite W est croissante majeure: elle converge. Notons S sa somme. On a dj $S \leq UV$. Montrons l'ingalit inverse.

On a $K_n \subset \Delta_{2n}$, donc:

$$W_{2n} \geq U_n \cdot V_n,$$

et un passage la limite nous assure que $S \geq UV$, cqfd. $\diamond$

Thorme: Si (u) et (v) sont deux sries absolument convergentes, alors la srie produit (w) est absolument convergente, de somme UV .

Dmonstration: On a $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \leq \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \cdot |v_{n-k}|$. Or, la convergence absolue des sries (u) et (v) nous assure, via le thorme prcdent, que le membre de droite de l'ingalit est le terme gnral d'une srie convergente. Par conséquent, la srie (w) converge absolument. Cherchons maintenant sa limite:

$$W_{2n} - U_n V_n = \sum_{(i,j) \in \Delta_{2n} - K_n} u_i v_j.$$

Bon, pour comprendre la majoration qui va suivre, il faut faire un dessin (que je ne sais pas reproduire malheureusement) pour voir sur quel ensemble on somme (je vous jure que tout est vrai):

$$|W_{2n} - U_n V_n| \leq \sum_{i=1}^{2n} |u_i| \sum_{j=1}^{2n-i} |v_j| + \sum_{j=n}^{2n} |v_j| \sum_{i=0}^{2n-j} |u_i|.$$

On pose $V' = \sum_0^\infty |v_j|$ et $U' = \sum_0^\infty |u_j|$, et on obtient du coup:

$$|W_{2n} - U_n V_n| \leq V' \sum_{i=n}^{2n} |u_i| + U' \sum_{i=n}^{2n} |v_i|,$$

, et le critre de Cauchy nous assure que chacune des sommes peut tre rendue petite en rendant n infiniment grand. Il s'en suit que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n V_n = UV$$

et la srie produit converge donc bien vers UV . $\diamond$

Tout ça pour quoi? Eh bien pour dfinir l'exponentielle, et avoir le rsultat fondamental suivant:

Thorme: Pour tout complexe z , la srie $\left(\left(\frac{z^n}{n!}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un complexe not $\exp z$. On a en outre la propri:

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall b \in \mathbb{C}, \exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b.$$

Dmonstration: Le critre de D'Alembert nous assure de la convergence absolue de la srie dfinissant $\exp z$.

A prsent, si a et b sont deux complexes, on peut appliquer le dernier thorme: le produit de Cauchy des sries $\left(\left(\frac{a^n}{n!}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\left(\frac{b^n}{n!}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le produit des limites, savoir $\exp a \cdot \exp b$. Le terme gnral de la srie produit est:

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!} (a+b)^n.$$

Cette srie converge donc vers ce qu'on a appel $\exp(a+b)$, ce qui prouve l'galit propose. $\diamond$

6.3 Exercices

1. Dmontrer les thormes classiques noncs sans dmonstration dans le chapitre.
2. Dmontrer le thorme nonçant le critre de D'Alembert.
3. Dmontrer le critre de Riemann.
4. Etudier suivant les valeurs de α et β la convergence des sries de Bertrand, de terme gnral:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\alpha n \beta}}.$$

5. Soit u une suite convergente de limite l . Montrer que la suite v de terme gnral:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} (u_1 + \dots + u_n)$$

converge aussi vers l .

6. Soient u_0 et v_0 deux reals positifs. On dñit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que les deux suites u et v convergent vers une mme limite.

7. On pose $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$, $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$.

8. Montrer que la suite u de terme gnral:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

converge vers une limite $L > 0$.

9. On se donne $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, et on note pour tout entier $p > 0$:

$$\|f\|_p = \left(\int_{[0,1]} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Etudier la convergence de la suite $(\|f\|_p)_{p>0}$.

10. Montrer la convergence de la suite de terme gnral

$$u_n = \sum_{i \leq n, j \leq n} \frac{(-1)^{i+j}}{1+i+j}.$$

11. Quelle est la nature de la srie (u) de terme gnral

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\epsilon_n}{n \ln n}, \text{ avec}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1, \epsilon_4 = \dots = \epsilon_7 = -1, \dots, \epsilon_{2^p} = \dots = \epsilon_{2^{p+1}-1} = (-1)^{p-1}, \dots$$

12. Calculer la somme des sries suivantes, aprs avoir montr leur convergence:

$$\left(\left(\ln \left(2 \cos \left(\frac{a}{2^n} \right) - 1 \right) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } a \in \left] \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[;$$

$$\left(\left(\operatorname{Arctg} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Chapter 7

Suites et sries de fonctions

On rappellera dans ce chapitre les notions essentielles sur les suites et sries de fonctions. Les thormes seront noncs sans dmonstration, et feront l'objet d'exercices en cours: en effet, les sujets de concours tant trs axs sur cette partie du programme, il convient de bien tout maîtriser, de bien comprendre les thormes (notamment ceux qui nous permettent d'intervertir les limites), pourquoi leurs hypothses sont indispensables,...

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

7.1 Suites de fonctions

Dfnitions:

- On appelle suite de fonctions une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{K}$.
- Si pour tout x de I , la suite numrique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un scalaire $f(x)$, on dira que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f . Cette condition est quivalente dire que:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

- On dira que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformment vers la fonction f si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

- On dira qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait au critre de Cauchy uniforme si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

◇

Thormes:

- La convergence uniforme implique la convergence simple.
- Une suite de fonctions converge uniformment si et seulement si elle satisfait au critre de Cauchy uniforme.

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions convergeant uniformment sur I vers f . Soit a un point adhérent I , tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a, x \in I} f_n(x) = l_n.$$

Alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un scalaire l , et on a

$$l = \lim_{x \rightarrow a, x \in I} f(x).$$

- Une limite uniforme de fonctions continues en a est continue en a . Une limite uniforme de fonctions continues sur I est continue sur I . L'ensemble $(\mathcal{C}(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est donc un espace de Banach.
- Si une suite de fonctions converge uniformment sur tout compact inclus dans I , et si chaque terme de la suite est continu sur I , alors la limite est continue sur I .
- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant uniformment vers une fonction f continue par morceaux sur I . Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformment sur tout segment de I vers une fonction f . Soit $x_0 \in I$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt \text{ et } F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors uniformment vers la fonction F .

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continument drivables sur I , convergeant simplement vers f , et telle que la suite des drives converge uniformment sur tout compact de I vers une fonction g . Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en fait uniformment vers f , et f est drivable, de fonction drive g .

7.2 Sries de fonctions

Il n'y a rien de nouveau ici (part peut tre quelques nouveaux types de convergences): les sries sont des suites, donc il suffit d'adapter les thormes prcdents en termes de sries.

Dfnitions:

- **Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dira que la srie de fonctions $((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ converge simplement (resp. converge uniformment) vers une fonction f si et seulement si la suite des sommes partielles**

$$(F_n = \sum_{k=0}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge simplement (resp. uniformment) vers f .

- **Soit $((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ une srie de fonctions bornes sur I . On dira que la srie converge normalement si et seulement si la srie $((\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}})$ converge.**

◇

Thormes:

- *La convergence normale implique la convergence uniforme et absolue.*
- *La convergence uniforme et absolue implique la convergence uniforme et la convergence simple et absolue.*
- *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
- *La convergence simple et absolue implique la convergence simple.*
- *Une srie uniformment convergente sur I s'intgre termes termes.*
- *Une srie de fonctions de classe C^1 sur I , convergeant simplement et dont la srie des drives converge uniformment sur tout compact de I se drive terme terme.*

7.3 Exercices

- S'entraîner à démontrer les thormes ci-dessus.
- Étudier les sries de fonctions suivantes:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \sin x \cos^n x.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right); \text{ limite de la somme en } +\infty?.$$

Chapter 8

Intgration

Ce chapitre se divise en deux parties: tout d'abord la d'finition de l'intgrale sur une partie compacte de $\mathbb{R}$, puis le passage des intervalles quelconques. A noter que pour cette dernire partie, ceux qui font les programmes de taupe nous autorisent enfin utiliser les thormes de convergence de Lebesgue (bien que dans une formulation): ce sont des thormes extrmement puissants, qui "torchent" la plupart des exercices qu'on proposait avant. En clair, il faut en user et en abuser.

8.1 Intgration sur un segment

8.1.1 Prliminaire

D'finitions:

- Une fonction f d'finie sur $[a, b]$ valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision croissante finie

$$S = (a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b)$$

de $[a, b]$, telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f $]a_i, a_{i+1}[$ soit continue, et prolongeable par continuit $[a_i, a_{i+1}]$.

- Etant donne une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on appelle subdivision subordonne f toute subdivision satisfaisant la propri't ci-dessus. On notera $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.
- Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Une application f de I dans $\mathbb{K}$ sera dite continue par morceaux si et seulement si elle l'est sur tout segment de I .
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dira que f est en escalier si et seulement s'il existe une subdivision finie croissante

$$S = (a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b)$$

de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction de f $]a_i, a_{i+1}[$ soit une constante. Une telle division sera dite subordonne f . L'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a, b]$ sera not $\mathcal{E}([a, b])$.

- Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dira que f est en escalier sur I si et seulement si il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que la restriction de f $[a, b]$ soit en escalier, et f est nulle en dehors de $[a, b]$.

◇

Ces précisions tant faites, nous pouvons aborder la thorme la base de notre construction de l'intgrale:

Thorme: Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Dmonstration: Soit f continue sur $[a, b]$. Il s'agit d'un compact, donc f y est uniformment continue:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b], (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

On se donne $\epsilon > 0$, et on lui associe η . On va maintenant dcouper $[a, b]$ en tranches de longueur plus petite que η , de manire pouvoir estimer l'erreur faite en approchant f par une constante sur chacune de ces tranches: il existe un unique entier n tel que

$$a + n\eta \leq b \leq a + (n - 1)\eta.$$

On pose alors la subdivision suivante:

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & a, \\ a_1 & = & a + \eta, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & = & a + (n - 1)\eta, \\ a_n & = & b. \end{array}$$

On dfinit alors la fonction en escalier

$$f_\epsilon : x \mapsto \begin{cases} f(a_0) & \text{si } x \in [a_0, a_1[, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ f(a_{n-1}) & \text{si } x \in [a_{n-1}, a_n] \end{cases}$$

Soit $x \in [a, b]$. x se trouve dans l'un des intervalles de la subdivision, disons $[a_i, a_{i+1}[$. Du coup, $|x - a_i| \leq \eta$, et on a:

$$|f(x) - f(a_i)| = |f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \epsilon,$$

et, x ayant t choisi quelconque:

$$\|f - f_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon.$$

Il ne reste plus qu' discrteriser la famille des f_ϵ ainsi construite (par exemple en prenant $\epsilon_k = \frac{1}{k}$) pour obtenir une suite de fonctions dans $\mathcal{E}([a, b])$ convergeant uniformment vers f . ◇

Corollaire: TOUTE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR $[a, b]$ EST LIMITE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS EN ESCALIER.

Dmonstration: On approche f sur chaque tronçon d'une subdivision adapte et c'est gagn. ◇

8.1.2 Construction de l'intgrale

Dfinition: Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$, et soit

$$S = (a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b)$$

une subdivision adaptée f . On pose alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(a_{i+1} - a_i).$$

◇

Cette définition peut sembler quelque peu ambiguë, dans la mesure où la valeur de l'intégrale semble dépendre de la subdivision. En fait, on peut s'assurer qu'il n'en est rien. La certitude que l'on a du résultat, ajoutée au fait que la démonstration est assez technique, sont deux bonnes raisons pour ne pas la faire.

On peut aussi voir sans trop de problème que l'intégrale est linéaire (il suffit de faire un travail d'affinage des subdivisions), et que l'on a, en vertu de l'inégalité triangulaire:

$$\forall f \in \mathcal{E}([a, b]), \left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|.$$

Théorème et définition: Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f , alors la suite des intégrales converge également vers un vecteur appelé intégrale de f sur $[a, b]$, et noté $\int_{[a,b]} f$. Cette limite est intrinsèque à la fonction f , c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier considérée.

Démonstration: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. On pose pour tout n :

$$I_n = \int_{[a,b]} f_n.$$

On souhaite montrer que cette suite converge. Comme notre espace vectoriel d'arrivée est de dimension finie, donc complet, on se dit que ça serait bien de montrer qu'on a affaire à une suite de Cauchy. On a, pour deux entiers n et p :

$$\|I_n - I_p\| = \left\| \int_{[a,b]} (f_n - f_p) \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f_n - f_p\|_\infty = (b-a) \|f_n - f_p\|_\infty.$$

Or, la suite de fonctions converge uniformément, donc vérifie le critère de Cauchy uniforme et il s'en suit aisément que la suite I est de Cauchy. Du coup, elle converge vers un vecteur noté I . Montrons présentement que si on prend une autre suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en escalier convergeant uniformément vers f , alors la suite des intégrales converge aussi vers I . Notons pour le moment

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} g_n.$$

Soit ϵ un réel strictement positif; il existe un rang N au-delà duquel on a la fois:

$$\forall n \geq N, \|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon \text{ et } \|f - g_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

On se donne alors n plus grand que N :

$$\|f_n - g_n\|_\infty \leq \|f_n - f - (g_n - f)\| \leq 2\epsilon.$$

Il s'en suit que:

$$\|I_n - J_n\| \leq \left\| \int_{[a,b]} (f_n - g_n) \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f_n - g_n\| \leq 2\epsilon(b-a).$$

On en déduit que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite, ce qui achève la démonstration. ◇

Propriétés: L'INTÉGRALE EST UNE APPLICATION LINÉAIRE SUR L'ENSEMBLE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX.

Démonstration: On se donne deux fonctions f et g continues par morceaux. Elles sont chacune limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, respectivement $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit n un entier. On a :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f_n + g_n) = \lambda \int_{[a,b]} f_n + \int_{[a,b]} g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g,$$

et le membre de gauche tend, quant à lui vers $\int_{[a,b]} (\lambda f + g)$, ce qui montre la linéarité de l'intégrale. $\diamond$

Propriété: SI f EST UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX, VALEURS DANS $\mathbb{R}$ ET POSITIVE, ALORS SON INTÉGRALE EST POSITIVE.

Démonstration: La démarche est la même : on passe par une suite de fonctions en escalier positives qui approchent f uniformément, et on passe la limite. $\diamond$

Corollaire: SI f ET g SONT DES FONCTIONS REELLES TELLES QUE $f \leq g$, ALORS $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Démonstration: On applique le théorème précédent à $g - f$ qui est une fonction positive, et on conclut. $\diamond$

Inégalité de la moyenne: Soit $f \in C_{pm}([a,b])$, valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$. f est donc bornée sur $[a,b]$. Soit $M = \|f\|_\infty$. Alors

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq M(b-a).$$

Propriété: L'INTÉGRALE EST ADDITIVE, EN CE SENS QUE SI $c \in [a,b]$, ALORS

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration: Toujours le même schéma : c'est vrai pour les fonctions en escalier, donc en passant la limite, on obtient le résultat pour les fonctions continues par morceaux. $\diamond$

Venons en maintenant la caractérisation de la nullité d'une fonction continue l'aide de son intégrale :

Théorème: Soit f une fonction $\mathcal{C}([a,b])$, valeurs réelles positives et d'intégrale nulle. Alors f est nulle.

Démonstration: L'idée pour démontrer ce résultat est la suivante : si f n'est pas nulle en un point, elle ne l'est pas autour de ce point, par continuité, et son intégrale doit donc être minime par l'intégrale sur ce voisinage. f tant positive strictement sur ce voisinage, elle aura une intégrale strictement positive et on aura gagné. Reste plus qu'à mettre ça en forme. Supposons donc que f ne s'annule pas en un point x . On a donc $f(x) > 0$. f est continue, donc, en appliquant la continuité avec $\epsilon = \frac{1}{2692}f(x)$, on a :

$$\exists \alpha > 0, \forall y \in [x - \alpha, x + \alpha], |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2692}f(x).$$

Du coup, on a la minoration suivante sur $(x - \alpha, x + \alpha) = V$:

$$\forall y \in V, 0 < \frac{2691}{2692}f(x) \leq f(y),$$

et on intgre:

$$\int_V f \geq 2\alpha \frac{2691}{2692} > 0,$$

ce qui contredit le fait que l'intgrale sur $[a, b]$ de f est nulle. Par consquent, il n'y a aucun point en lequel f n'est pas nulle, ou encore, f est nulle partout. $\diamond$

Consquences:

- L'APPLICATION $\| \cdot \|_1 : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ EST UNE NORME; SI UNE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES CONVERGE POUR CETTE NORME, ON DIRA QU'ELLE CONVERGE EN MOYENNE.
- L'APPLICATION $(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ EST UN PRODUIT SCALAIRE; ON NOTE $\| \cdot \|_2$ LA NORME ASSOCIEE, ET ON L'APPELLE NORME DE LA CONVERGENCE QUADRATIQUE.

On peut vrifier aisment qu'on a les relations suivantes:

$$\| \cdot \|_1 \leq \sqrt{b-a} \| \cdot \|_2 \leq (b-a) \| \cdot \|_\infty.$$

On en dduit alors:

Propriets: La convergence uniforme ($\| \cdot \|_\infty$) implique la convergence en moyenne quadratique ($\| \cdot \|_2$), qui implique elle mme la convergence en moyenne ($\| \cdot \|_1$). En outre, si une suite de fonctions converge en moyenne, alors la suite des intgrales converge vers l'intgrale de la limite.

8.1.3 Lien entre intgrale et primitive

E est un espace vectoriel norm de dimension finie, et on note I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$, soit $a \in I$. Quel que soit $x \in I$, f est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, et il est donc licite de poser $F(x) = \int_{[a, x]} f$.

Lemme: Sur tout segment inclus dans I , F est lipschitzienne, donc continue.

Preuve: Soit $[c, d] \subset I$. f est continue par morceaux sur $[c, d]$, donc borne par M . Soient x et y deux points de $[c, d]$. On a, d'aprs l'ingalit de la moyenne:

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|,$$

et F est alors M -lipschitzienne. $\diamond$

Thorme: Soit x_0 un point intrieur I . F est drivable en x_0 droite (resp. gauche), et le vecteur driv de F en x_0 droite (resp. gauche) est la limite de f en x_0 droite (resp. gauche).

Dmonstration: Notons $l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. On a, tant donn $x \in I$:

$$F(x) - F(x_0) - l(x - x_0) = \int_{[a, x]} f - \int_{[a, x_0]} f - \int_{[x_0, x]} l = \int_{[x_0, x]} (f - l).$$

Or, l est la limite droite de f en x_0 , donc, tant donn $\epsilon > 0$, il existe un rel α strictement positif, tel que:

$$\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha], \|f(x) - l\| \leq \epsilon.$$

Donnons nous donc x dans l'intervalle $]x_0, x_0 + \alpha]$; on a alors:

$$\|F(x) - F(x_0) - l(x - x_0)\| \leq \int_{[x_0, x]} \|f - l\| \leq |x - x_0|\epsilon,$$

ingalit qui nous assure que la driv droite de F en x_0 est l . Le cas de la drivabilit gauche se traite de manire identique. $\diamond$

Consquences:

- SI x_0 EST UN POINT DE CONTINUIT DE f , ALORS F EST DRIVABLE EN x_0 , DE VECTEUR DRIV $f(x_0)$; F EST LA PRIMITIVE DE f QUI S'ANNULE EN a .
- PRENANT CE RESULTAT DANS L'AUTRE SENS, SI f EST CONTINUE SUR I , ET DE CLASSE $\mathcal{C}^1$ PAR MORCEAUX, ALORS QUELS QUE SOIENT a ET b DANS I

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(t).$$

- SOIT f CONTINUE SUR $[a, b]$, DRIVE CONTINUE ET BORNE SUR L'OUVERT $]a, b[$, ON A L'INGALIT DE LA MOYENNE:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \text{SUP}\{\|f'(x)\|, x \in]a, b[\}.$$

- SI f ET g SONT CONTINUES ET DE CLASSE $\mathcal{C}_{pm}^1$ SUR $[a, b]$, ON A LA FORMULE D'INTGRATION PAR PARTIES:

$$\int_{[a,b]} fg' = [fg]_a^b - \int_{[a,b]} f'g.$$

Tous ces rsultats sont des consquences directes du thorme donnant le lien entre primitive et drive, et ne ncessitent pas mon avis de dmonstration. Voici, pour terminer cette partie le thorme de changement de variable:

Thorme: Soit f continue sur I , soit $\phi \in \mathcal{C}_{pm}^1([a, b], I)$. Alors,

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

Dmonstration: On note F la primitive de f qui s'annule en $\phi(a)$. On a alors:

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b (F' \circ \phi)(t)\phi'(t)dt = \int_a^b (F \circ \phi)'(t)dt = [(F \circ \phi)(t)]_a^b = [F(t)]_{\phi(a)}^{\phi(b)} = \int_{[\phi(a), \phi(b)]} f.$$

$\diamond$

8.2 Intgration sur un intervalle quelconque

Cette partie est assez laborieuse, dans la mesure o on recommence encore trois fois une construction de l'intgrale: pour les fonctions positives, pour les fonctions valeurs relles, et enfin pour les fonctions valeurs complexes, et on redmontre chaque fois les proprits que l'on sait. Nous ferons donc en dtails la construction de l'intgrale des fonctions positive, car c'est vraiment la clef de voute de la thorie, et nous verrons plus rapidement les autres cas. Enfin, la fin du chapitre sera marque par l'nonc des divers thormes de Lebesgue, qu'on admettra, non pas parce qu'ils sont indmontrables avec les outils que nous avons (on a une belle dmonstration bien longue dans la RMS), mais plutt parce qu'ils ncessitent de nombreux petits lemmes techniques, peu utiles dans l'absolu. I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

8.2.1 Fonctions relles positives

Dfinition: On dira que f est intgrable sur I si et seulement si il existe $M > 0$, tel que pour tout segment $J \subset I$, on ait:

$$\int_J f \leq M.$$

Si f est intgrable sur I , on pose

$$\int_I f = \text{Sup} \left\{ \int_J f, J \text{ segment inclus dans } I \right\}.$$

◇

A noter que si I est un segment, alors cette dfinition coincide ave celle du paragraphe prcdent.

Thorme: Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de segments dont la runion est I . Une fonction f positive et continue par morceaux sur I est intgrable si et seulement si

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{J_n} f \leq M$$

et on a $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f$.

Dmonstration: Si f est intgrable, alors la condition technique est un cas particulier de la dfinition de l'intgrabilit.

Rciproquement, si la condition

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{J_n} f \leq M$$

est vrifie, on se donne J un segment quelconque de I , d'extrmits a et b . Compte tenu du fait que la runion des J_n est I , il existe un rang N au del duquel J est inclus dans tous les $(J_n)_{n \geq N}$. Comme f est positive, son intgrale sur J est plus petite que son intgrale sur J_N , qui est elle mme majore par M . On a donc montr que pour tout segment J inclus dans I

$$\int_J f \leq \int_I f \leq M,$$

ce qui prouve l'intgrabilit de f .

Donnons nous $\epsilon > 0$. Compte tenu de la dfinition de l'intgrale de f en tant que Sup, il existe un segment J inclus dans I , tel que

$$\int_I f - \epsilon \leq \int_J f.$$

Or, la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc au del d'un rang N , tous ses termes contiennent J . Il s'en suit, f tant positive, que

$$\forall n \geq N, \int_{J_n} f \geq \int_J f \geq \int_I f - \epsilon.$$

Par passage la limite, il vient alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \geq \int_I f - \epsilon.$$

Ce rsultat tant vrai pour tout ϵ , on a l'ingalit qu'il nous fallait. ◇

Ce thorme nous dit donc que, quelle que soit la façon dont on fait pour tendre vers l'intervalle I , si la fonction est intgrable, on tend vers l'intgrale de la fonction. En plus clair:

Corollaire: Si I a pour extrmits a et b (dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors f est intgrable sur I si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a+, y \rightarrow b-} \int_x^y f < \infty,$$

et dans ce cas, la limite est gale l'intgrale.

Montrons qu'on a toujours les propriets de linarit:

Thorme: La somme de deux fonctions relles positives continues par morceaux sur I intgrables est intgrable, et l'intgrale de la somme est la somme des intgrales.

Dmonstration: Soient f et g deux fonctions vrifiant toutes ces propriets. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de segments de runion gale I . On a alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{J_n} (f + g) = \int_{J_n} f + \int_{J_n} g \leq \int_I f + \int_I g.$$

Le thorme prcdent nous assure alors que $f+g$ est intgrable et que son intgrale est obtenue par passage la limite, d'o

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

◇

Thormes:

- Si f est continue par morceaux sur I , positive, intgrable, alors son intgrale est positive.
- Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I , positives, telles que $f \leq g$. Si g est intgrable, alors f l'est; si f n'est pas intgrable, alors g non plus.

Pour en terminer avec les fonctions positives, nous allons rappeler le critre de Riemann:

Thorme: Soit α un rel. La fonction relle positive $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intgrable sur $[1, +\infty[$ (resp. $]0, 1[$) si et seulement si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha < 1$).

8.2.2 Fonctions relles et complexes

Dfinition: Soit f continue par morceaux sur I , valeurs relles ou complexes. On dira que f est intgrable sur I si et seulement si $|f|$ l'est.

◇

Thorme: L'ensemble des fonctions intgrables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I)$.

Dmonstration: Soient f et g deux fonctions intgrables sur I , soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors:

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|,$$

et le membre droit de l'ingalit est intgrable par hypothse. Du coup, $\lambda f + g$ est intgrable. ◇

Bon, pour le moment, on a juste dfini l'intgrabilit, mais on ne sait toujours pas ce qu'est l'intgrale d'une fonction intgrable. Si f est une fonction relle, on note:

$$f_+ = \text{Max}(f, 0) \text{ et } f_- = -\text{Min}(f, 0);$$

ces deux fonctions positives representent respectivement la partie positive et la partie negative de f . On a alors

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-.$$

On voit donc que f est intgrable si et seulement si f_+ et f_- le sont. Du coup, comme on veut que l'intgrale qu'on va dfinir soit lineaire, on est amen naturellement poser:

Dfinition: Soit f une fonction valeurs reelles intgrable. Alors f_+ et f_- le sont, et on pose:

$$\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-.$$

◇

A present, si f est valeurs complexes, alors on a

$$f = \operatorname{Re}f + i\operatorname{Im}f \text{ et } |f| = \sqrt{(\operatorname{Re}f)^2 + (\operatorname{Im}f)^2}$$

ce qui nous montre que f est intgrable si et seulement si sa partie relle et sa partie imaginaires le sont. On pose alors la dfinition suivante:

Dfinition: Soit f valeurs complexes, continue par morceaux sur I et intgrable. Alors sa partie relle et sa partie imaginaire le sont. Par dfinition:

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}f + i \int_I \operatorname{Im}f.$$

◇

Thormes:

- Cette dfinition de l'intgrale est lineaire.
- Si a et b sont les extrmits dans $\overline{\mathbb{R}}$ de I , et si f est intgrable sur I , alors on a:

$$\lim_{x \rightarrow a+, y \rightarrow b-} \int_x^y f = \int_I f.$$

Preuve:

- Pour le dmontrer, il faut passer par des suites croissantes de segments dont la reunion est I , et passer la limite.
- La deuxime assertion se dmontre en utilisant le thorme similaire dmontr pour les fonctions positives: en gros, on fait ressortir tout ce qui est positif et intgrable dans f , on dit que c'est vrai pour les fonctions positives intgrables, et on regroupe par linarit.

◇

8.2.3 Thormes de convergence

Thorme de convergence monotone: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions reelles continues par morceaux, intgrables sur I , croissante¹ et convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux. Alors f est intgrable sur I si et seulement si la suite des intgrales est borne; dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

¹C'est la suite qui est croissante, et non pas les fonctions!

Donnons en maintenant une version pour les sries de fonctions:

Corollaire: SOIT $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ UNE SRIE DE FONCTIONS RELLES POSITIVES CONTINUES PAR MORCEAUX SUR I ET INTGRABLES, CONVERGEANT SIMPLEMENT VERS f . f EST INTGRABLE SUR I SI ET SEULEMENT SI LA SRIE DES INTGRALES CONVERGE, AUQUEL CAS ON PEUT INTERVERTIR SOMME ET INTGRALE.

Thorme: Soit $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une srie de fonctions continues par morceaux intgrables sur I , convergeant simplement vers f continue par morceaux. Alors f est intgrable sur I si et seulement si la srie

$$\left(\left(\int_I |u_n| \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge, et dans ce cas, l'intgrale de f est gale la somme de la srie des intgrales.

Thorme de convergence domine: Soit $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I , intgrables, convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux, et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq h(x)$$

o h est une fonction continue par morceaux intgrable. Alors f est intgrable sur I , et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

Thorme de continuit: Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit f une application continue de $A \times I$ dans $\mathbb{C}$, telle que:

$$\forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est intgrable sur } I.$$

On suppose de plus qu'il existe une fonction h continue par morceaux, intgrable sur I , telle que

$$\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq h(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Thorme de drivation: Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit f une application continue de $A \times I$ dans $\mathbb{C}$ vrfiant les hypothses du thorme prcdent. On suppose en outre que la drive partielle par rapport x de f vrfie aussi ces hypothses. Alors $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continment drivable sur A , et se drive sous le signe d'intgrale.

8.3 Exercices

1. Soient p et q deux rels suprieurs 1, tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ positives. Montrer que l'on a:

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En dduire que l'on dfini ainsi une norme:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p &: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

2. Soit f continue sur $[0, 1]$, non nulle; soit n un entier tel que:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \int_0^1 t^k f(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois.

3. Calculer la limite de la suite de terme gnral

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^{\frac{k}{n}}.$$

4. Etudier l'intégrabilité sur $]0, \pi]$ de $f_n : x \mapsto \ln(2 \sin(x/2)) \cos(nx)$, et calculer si elle existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(t) dt.$$

5. Pour quelles valeurs du réel α la fonction $f_\alpha : x \rightarrow \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Lorsque tel est le cas, on pose

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_\alpha.$$

Calculer $I(2)$ et $I(3)$.

6. Pour quelles valeurs du réel α la fonction $f_\alpha : x \rightarrow 1 - (\operatorname{th} x)^\alpha$ est-elle intégrable?

7. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même, intégrable. Calculer

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(t+a) - f(t)| dt.$$

8. Soit E l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, de carré intégrable. À toute fonction $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f' et f'' soient aussi dans E , on associe le réel:

$$\delta(f) = \begin{vmatrix} \int_{\mathbb{R}_+} f^2 & \int_{\mathbb{R}_+} f f' & \int_{\mathbb{R}_+} f f'' \\ \int_{\mathbb{R}_+} f f' & \int_{\mathbb{R}_+} f'^2 & \int_{\mathbb{R}_+} f' f'' \\ \int_{\mathbb{R}_+} f f'' & \int_{\mathbb{R}_+} f' f'' & \int_{\mathbb{R}_+} f''^2 \end{vmatrix}$$

Résoudre $\delta(f) = 0$.

9. Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \rightarrow e^{-t^2+itx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et calculer

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+itx} dt.$$

10.

$$\text{Calculer la limite: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^5)^n}.$$

11. Etudier l'intégrabilité de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{(1+x^2|\sin x|)^{\frac{3}{2}}}$.

12. On pose lorsque ça a un sens:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Montrer que f et g sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$; montrer que $f + g^2$ est une constante, et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$